1920

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Кубанский государственный университет»
в г.Тихорецке

Кафедра социально-гуманитарных дисциплин

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала

_____________ Е.Н. Астанкова
«02» сентября 2013г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
по дисциплине

ЕН.Ф.1 МАТЕМАТИКА

Специальность 080109.65 – Бухгалтерский учет, анализ и аудит
Форма обучения: очная, заочная
Курс 1,2 Семестр 1,2,3,4

Тихорецк 2013

Пояснительная записка

Учебная дисциплина «Математика» является обязательной дисциплиной в цикле математических и естественно-научных дисциплин. Ее изучение базируется на знаниях, умениях и навыках, полученных в период довузовской подготовки. В свою очередь она является не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Математика обеспечивает изучение экономических дисциплин, а также менеджмента, бухучета, статистики и др.

Объектом изучения дисциплины являются математические модели. Это могут быть как непосредственно математические модели реальных явлений, так и объекты для изучения этих моделей.

Предметом изучения являются существующие между этими объектами отношения.

В результате изучения математики студент должен:

Иметь представление:

- О месте и роли математики в современном мире;
- Об истории развития математики;
- О выдающихся ученых- математиках.

Знать и уметь использовать:

- Основные понятия, свойства, теоремы линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов;
- Математические методы при решении прикладных задач.

Владеть:

- Операциями над векторами и матрицами;
- Способами решения систем линейных уравнений;
- Способами вычисления определителей;
- Приемами нахождения производных и интегралов;
- Методами интегрирования;
- Теоретическими основами числовых рядов;
- Методами решения дифференциальных уравнений;
- Основными теоремами теории вероятностей;
- Методами вычисления числовых характеристик случайных величин;
- Методами вычисления экстремума функции;
- Способами решения основных задач математического программирования.

Иметь опыт (навык):

- Вычисления производных элементарных функций, производных высших порядков;
- Нахождения табличных интегралов;
- Нахождения интегралов методом замены переменной и интегрирования по частям;

- Интегрирования рациональных дробей и тригонометрических функций;
- Исследования числовых рядов;
- Исследования экстремума функции;
- Вычисления числовых характеристик случайных величин;
- Решения основных задач математического программирования.

Фундаментальность подготовки обеспечивается изучением основных понятий и категорий математики в соответствии с требованиями государственного общеобразовательного стандарта в области математики для специалистов с высшим образованием по экономическим специальностям. Для изучения в первом семестре включены следующие разделы: «Элементы математического анализа», «Дифференциальное исчисление», «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление». Во втором семестре - «Элементы линейной алгебры», «Элементы векторной алгебры», «Элементы аналитической геометрии», «Комплексные числа», «Дифференциальные уравнения», «Ряды». В третьем семестре представлены разделы «Теория вероятностей», «Математическая статистика», в четвертом – «Теория игр», «Математическое программирование».

Прикладная направленность дисциплины обеспечивается тем, что всюду, где это возможно, даются геометрический и экономический смысл математических понятий, приводятся математические формулировки экономических законов (закона убывающей доходности, принципа убывающей полезности, условия оптимальности выпуска продукции), рассматриваются простейшие приложения высшей математики в экономике(эластичность функции). Такие приложения почти не требуют дополнительной экономической информации.

Для развития навыков **самостоятельной работы** студентами выполняются:

- Расчетная работа по интегральному исчислению;
- Дифференциальные уравнения»;
- Домашняя контрольная работа по теме: « Элементы линейной алгебры»;
- Рефераты, связанные с историей математики;
- Домашняя контрольная работа по теме: «Теория вероятностей»;
- Домашняя контрольная работа по теме: «Математическое программирование».

Усвоение учебного материала студентами осуществляется преподавателем в ходе текущего и итогового контроля.

Текущий контроль знаний, умений и навыков проводится в следующих формах: путем устного опроса, самостоятельных и контрольных работ, при проверке домашних заданий.

Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена.

В ходе изучения математики решаются следующие **воспитательные задачи**:

- Формирование и развитие навыков логического мышления;
- Формирование высокой общей и управленческой культуры;
- Формирование необходимых морально-этических и профессиональных качеств менеджера;
- Воспитание в духе соблюдения требований Конституции РФ, законов и других нормативных актов Правительства РФ.

Требования ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы

Индекс	Дисциплина и ее основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф	**Федеральный компонент**	**1120**
ЕН.Ф.01	**Математика** **:** Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: операции над векторами и матрицами; системы линейных алгебраических уравнений; определители и их свойства; собственные значения матриц; комплексные числа; прямые и плоскости в аффинном пространстве; выпуклые множества и их свойства.; математический анализ и дифференциальные уравнения: предел последовательности и его свойства; предел и непрерывность функции; экстремумы функций нескольких переменных; неопределенный и определенный интегралы; числовые и степенные ряды; дифференциальные уравнения первого порядка; линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Теория вероятностей и математическая статистика: случайные события; частота и вероятность; основные формулы для вычисления вероятностей; случайные величины; числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин; нормальный закон распределения; генеральная совокупность и выборка; оценки параметров; корреляция и регрессия. Экономико-математические методы: линейное и целочисленное программирование; графический метод и симплекс-метод решения задач линейного программирования; динамическое программирование; математическая теория оптимального управления; матричные игры; кооперативные игры; игры с природой; плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы графы; орграфы; сетевые графики; сети Петри; марковские процессы; задачи анализа замкнутых и разомкнутых систем массового обслуживания. Экономико-математические модели: функции полезности; кривые безразличия; функции спроса; уравнение Слуцкого; кривые .доход-потребление.; кривые .цены-потребление.; коэффициенты эластичности; материальные балансы; функции выпуска продукции; производственные функции затрат ресурсов; модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции; модели общего экономического равновесия; модель Эрроу-Гурвица; статистическая и динамическая модели межотраслевого баланса; общие модели развития экономики; модель Солоу.	600

Тематический план

<u>ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР</u>

Общее количество часов - 90.
Из них: лекций - 36, практических занятий – 54

№ п/п	Название темы	Очная форма обучения			Заочная форма обучения		
		лекции	семи-нары	сам. работа	лекции	семи-нары	сам. работа
1 семестр							
Раздел 1. Элементы линейной алгебры							
1	Матрицы	4	4	6	2	-	12
2	Определители	2	4	6	-	2	12
3	Системы линейных уравнений	4	6	6	2	-	12
Раздел 2. Элементы векторной алгебры							
4	Векторы	2	6	6	2	-	14
5	Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов	4	4	6	-	2	10
Раздел 3. Элементы аналитической геометрии							
6	Линии на плоскости	4	4	6	2	-	14
7	Линии второго порядка	4	4	6	-	2	12
Раздел 4. Элементы математического анализа.							
8	Функция	2	4	6	-	2	12
9	Последовательности. Предел последовательности	2	6	6	2	-	
10	Предел функции	2	6	6	2	-	16
11	Бесконечно большие и бесконечно малые функции	4	4	6	-	2	10
12	Непрерывность функций	2	2	6	-	2	14
	Всего за семестр	***36***	***54***	***72***	***12***	***12***	***138***

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Общее количество часов - 72.
Из них: лекций - 36, практических занятий - 36.

№ п/п	Название темы	Очная форма обучения			Заочная форма обучения		
		лекции	семи-нары	сам. работа	лекции	семи-нары	сам. работа
2 семестр							
Раздел 5. Дифференциальное исчисление							
13	Производная функции	4	4	6	2	-	6
14	Дифференциал функции	2	2	6	-	-	6
15	Приложения производной	2	4	6	-	-	6
Раздел 6: Комплексные числа							
16	Понятие и представление комплексных чисел	2	2	6	-	2	6
17	Действия над комплексными числами	2	2	6	-	-	6
Раздел 7. Интегральное исчисление							
18	Неопределенный интеграл	4	4	6	2	-	6
19	Определенный интеграл	2	4	6	-	2	6
20	Несобственный интеграл	2	2	6	-	-	6
Раздел 8. Функции нескольких переменных							
21	Функции нескольких переменных	4	2	6	-	-	6
Раздел 9. Дифференциальные уравнения							
22	Дифференциальные уравнения первого порядка	4	2	6	2	-	
23	Дифференциальные уравнения высших порядков	2	2	6	-	-	6
24	Линейные ДУ	2	2	6	-	-	6
Раздел 10. Ряды							
25	Числовые ряды	2	2	6	-	2	6
26	Степенные ряды	2	2	6	-	-	
	Всего за семестр	***36***	***36***	***84***	***6***	***6***	***72***

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

Общее количество часов - 72.
Из них: лекций - 36, практических занятий - 36.

№ п/п	Название темы	Очная форма обучения			Заочная форма Обучения		
		лекции	семи-нары	сам. работа	лекции	семи-нары	сам. работа
3 семестр							
Раздел 11. Теория вероятностей							
27	Введение. Случайные события	2	2	6	-	-	10
28	Теорема сложения вероятностей	2	2	6	1	1	10
29	Теорема умножения вероятностей	2	2	6	1	1	10
30	Случайные величины и законы их распределения	6	6	10	2	2	14
31	Закон больших чисел и предельные теоремы	4	4	4	-	-	10
Раздел 12. Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания							
32	Основные понятия. Классификация СМО	2	2	4	-	-	14
33	Понятие марковского случайного процесса. Потоки событий	4	4	6	1	1	10
34	СМО с отказами	2	2	6	-	-	10
35	СМО с ожиданием (очередью)	2	2	6	-	-	10
Раздел 13. Математическая статистика							
36	Вариационные ряды и их характеристики	2	2	6	-	-	12
37	Проверка статистических гипотез	4	4	6	-	-	10
38	Корреляционно-регрессионный анализ	4	4	6	1	1	12
	Всего за семестр	***36***	***36***	***72***	***6***	***6***	***132***

ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР

Общее количество часов - 72.
Из них: лекций - 36, практических занятий - 36.

№ п/п	Название темы	Очная форма обучения			Заочная форма обучения		
		лекции	семи-нары	сам. работа	лекции	семи-нары	сам. работа
4 семестр							
Раздел 14. Линейное программирование							
39	Введение. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи ЛП	2	2	4	1	1	10
40	Симплексный метод	4	4	6	1	1	10
41	Двойственность в линейном программировании	2	2	4	-	-	6
42	Транспортная задача	4	4	6	1	1	10
Раздел 15. Элементы теории матричных игр							
43	Матричные игры с нулевой суммой. Чистые и смешанные стратегии и их свойства	2	2	4	-	-	8
44	Приведение матричной игры к задаче ЛП	2	2	6	-	-	8
Раздел 16. Нелинейное программирование							
45	Определение экстремумов	2	2	4	-	-	10
46	Метод множителей Лагранжа	2	2	6	1	1	10
47	Динамическое программирование	2	2	6	-	-	10
Раздел 17. Теория графов							
48	Основные понятия теории графов	2	2	6	-	-	8
49	Потоки на сетях. Постановка задачи о максимальном потоке	4	4	6	1	1	8
Раздел 18. Сетевое планирование и управление							

50	Основные понятия. Назначения и области применения моделей управления запасами	2	2	2	-	-	16
51	Статистическая детерминиро-ванная модель без дефицита (с дефицитом)	4	24	2	1	1	6
52	Стохастические модели управления запасами	2	22	4	-	-	6
	Всего за семестр	***36***	***36***	***66***	***6***	***6***	***126***

Содержание лекционных занятий

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема №1. Матрицы

Основные понятия, операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, умножение двух матриц), обратная матрица, ранг матрицы.

Тема №2. Определители

Основные понятия, свойства определителей, определители 2-го и 3-го порядков, понятие определителя n-го порядка, свойства определителей.

Тема №3. Системы линейных уравнений

Линейные уравнения с n неизвестными, решение систем линейных уравнений (СЛУ), метод обратной матрицы, формулы Крамера, решение СЛУ методом Гаусса, системы линейных однородных уравнений.

РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема №4. Векторы

Понятия, операции над векторами, разложение вектора на составляющие; действия над векторами, заданными в координатной форме; n-мерный вектор, векторное пространство, размерность и базис векторного пространства, евклидово пространство.

Тема №5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их свойства.

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Тема №6. Линии на плоскости

Уравнение линии на плоскости, уравнение прямой: с угловым коэффициентом, проходящей через точку в заданном направлении, через две заданные точки, в отрезках; уравнение пучка прямых, общее уравнение прямой, расстояние от точки до прямой, понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве.

Тема №7. Линии второго порядка

Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

Тема №8. Функция

Функции: понятие функции, числовые функции, график функции, способы задания, основные характеристики функций, понятие обратной и сложной функций, основные элементарные функции и их графики; применение функций в экономике.

Тема №9. Последовательности. Предел последовательности

Числовая последовательность, предел числовой последовательности, основные утверждения о пределах числовых последовательностей.

Тема №10. Предел функции

Предел функции в точке и в бесконечности, признаки существования предела, замечательные пределы, задача о непрерывном начислении процентов.

Тема №11. Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Бесконечно малые и бесконечно большие величины, основные теоремы о пределах функций

Тема №12. Непрерывность функций

Понятие непрерывности функции в точке, в интервале, на отрезке; непрерывность основных элементарных функций, свойства функций, непрерывных в точке, непрерывность обратной и сложной функций, точки разрыва и их классификация.

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема №13. Производная функции

Задача о касательной; определение производной, ее геометрический, физический и экономический смысл; алгоритм нахождения производной; основные правила дифференцирования, таблица производных, производная сложной и обратной функций, производные основных элементарных функций, производные высших порядков, использование понятия производной в экономике.

Тема №14. Дифференциал функции

Понятие дифференциала функции, геометрический смысл дифференциала, таблица дифференциалов использование дифференциала в приближенных вычислениях, понятие о дифференциалах высших порядков.

Тема №15. Приложения производной

Основные теоремы дифференциального исчисления, правило Лопиталя, возрастание и убывание функций, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, выпуклость функции, точки перегиба, асимптоты графика функции, общая схема исследования функций и построения их графиков, приложение производной в экономической теории.

РАЗДЕЛ 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

Тема №16. Понятие и представление комплексных чисел

Основные понятия, геометрическое изображение комплексных чисел, формы записи комплексных чисел.

Тема №17. Действия над комплексными числами

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел, извлечение корня из комплексных чисел.

РАЗДЕЛ 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема №18. Неопределенный интеграл

Первообразная, понятие неопределенного интеграла, свойства неопределенного интеграла, таблица основных интегралов, основные методы интегрирования (непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям), разложение дробно-рациональной функции на простейшие дроби, интегрирование рациональных функций, интегрирование тригонометрических функций, интегрирование иррациональных функций.

Тема №19. Определенный интеграл

Определение, геометрический и экономический смысл определенного интеграла, свойства определенного интеграла, теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу, формула Ньютона-Лейбница, вычисления определенного интеграла, приближенные вычисления определенных интегралов, использование понятия определенного интеграла в экономике.

Тема №20. Несобственный интеграл

Несобственные интегралы первого, второго рода.

РАЗДЕЛ 8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тема №21. Функции нескольких переменных

Основные понятия: открытые и замкнутые области на плоскости, функция двух переменных, область определения, линия уровня; предел и непрерывность, частные производные, дифференциал функции, производная по направлению, градиент, экстремум функции нескольких переменных, наибольшее и наименьшее значения функции, локальный экстремум функции нескольких переменных, необходимое и достаточное условия экстремума для функции двух переменных, условный экстремум, метод множителей Лагранжа.

РАЗДЕЛ 9: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема №22. Дифференциальные уравнения первого порядка

Основные понятия, ДУ первого порядка, теорема о существовании и единственности решения, уравнения с разделяющимися переменными, однородные ДУ, неполные ДУ первого порядка.

Тема №23. Дифференциальные уравнения высших порядков

ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.

Тема №24. Линейные ДУ

Основные понятия; линейные ДУ первого порядка, линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

РАЗДЕЛ 10: РЯДЫ

Тема № 25. Числовые ряды

Основные понятия, сходимость ряда, необходимый признак сходимости, гармонический ряд, ряды с положительными членами, ряды с членами произвольного знака.

Тема № 26. Степенные ряды

Область сходимости степенного ряда, ряд Маклорена, применение рядов в приближенных вычислениях.

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 11. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема № 27. Введение. Случайные события

Предмет теории вероятностей и её значение для экономической науки; элементы комбинаторики; виды случайных событий; пространство элементарных событий; классическая вероятность и её свойства; геометрическая вероятность; относительная частота и её устойчивость.

Тема № 28. Теорема сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий; полная группа событий; противоположные события; принцип практической невозможности маловероятных событий.

Тема № 29. Теорема умножения вероятностей

Произведение событий; условная вероятность; теорема умножения вероятностей; независимые события; теорема умножения для независимых событий; вероятность появления хотя бы одного события; теорема сложения вероятностей совместных событий; формула полной вероятности; формула Байеса; формула Бернулли; локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Тема № 30. Случайные величины и законы их распределения

Понятие случайной величины; дискретная случайная величина (ДСВ); законы распределения и числовые характеристики ДСВ; непрерывная случайная величина (НСВ); законы распределения и числовые характеристики НСВ.

Тема № 31. Закон больших чисел и предельные теоремы

Понятие о законе больших чисел; неравенство Чебышёва; теорема Чебышёва; теорема Бернулли; сходимость по вероятности; понятие о центральной предельной теореме Ляпунова.

РАЗДЕЛ 12. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Тема № 32. Основные понятия. Классификация СМО

Случайные процессы; цепи Маркова; переходная вероятность; вероятность состояний; плотность переходной вероятности; система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностных состояний.

Тема № 33. Понятие марковского случайного процесса. Потоки событий

Простейший поток требований на обслуживание, поступивший в СМО; свойства простейшего потока; закон распределения числа событий за фиксированный промежуток времени в простейшем потоке.

Тема № 34. СМО с отказами

Одноканальная система с отказами; многоканальная система с отказами (задача Эрланга).

Тема № 35. СМО с ожиданием (очередью)

Одноканальная система с неограниченной очередью; многоканальная система с неограниченной очередью; СМО с ограниченной очередью; СМО с ограниченным временем ожидания; понятие о методе Монте-Карло.

РАЗДЕЛ 13. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Тема № 36. Вариационные ряды и их характеристики

Генеральная совокупность и выборка; числовые характеристики выборки; вариационный ряд; полигон и гистограмма; выборочная функция распределения.

Тема № 37. Проверка статистических гипотез

Статистическое оценивание параметров генеральной совокупности; точечные оценки и их свойства; интервальные оценки; виды статистических гипотез; критическая область; ошибки первого и второго рода; уровень значимости; мощность критерия.

Тема № 38. Корреляционно-регрессионнный анализ

Понятие корреляционной связи; корреляционная и регрессионная модели; уравнение регрессии; основные задачи корреляционно-регрессионнного анализа.

ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 14. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Тема № 39. Введение. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи ЛП

Постановка, форма записи и примеры задач линейного программирования; выпуклые многогранные множества и множество допустимых решений; опорное решение задачи ЛП; связь между опорным решением и крайними точками допустимого множества; геометрическая интерпретация задачи ЛП; графический метод решения задачи ЛП.

Тема № 40. Симплексный метод

Общая характеристика симплексного метода как метода частичного перебора опорных планов задачи ЛП; построение опорного плана; переход от одного опорного плана к другому в задаче ЛП; симплексные таблицы; описание алгоритма симплексного метода; метод искусственного базиса; вырождение задачи ЛП; устранение зацикленности.

Тема № 41. Двойственность в линейном программировании

Понятие двойственности; правила построения двойственных задач; 1-ая теорема двойственности (существование оптимальных решений двойственных задач); 2-ая теорема двойственности (теория равновесия); экономическая интерпретация двойственных задач и утверждений теории двойственности.

Тема № 42. Транспортная задача

Постановка транспортной задачи; открытая и закрытая модели; основные методы построения первоначального опорного плана; метод потенциалов; транспортные задачи с ограничениями на пропускную способность.

РАЗДЕЛ 15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

Тема № 43. Матричные игры с нулевой суммой. Чистые и смешанные стратегии и их свойства

Понятие об игровых моделях; платежная матрица; нижняя и верхняя цена игры; решение игр в смешанных стратегиях.

Тема № 44. Приведение матричной игры к задаче ЛП

Геометрическая интерпретация игры 2х2; приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

РАЗДЕЛ 16. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Тема № 45. Определение экстремумов

Классические методы определения экстремумов; локальный экстремум; глобальный экстремум; условный экстремум.

Тема № 46. Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа

Тема № 47. Динамическое программирование

Введение в теорию динамического программирования; общая постановка задачи ДП; принцип оптимальности Беллмана.

РАЗДЕЛ 17. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Тема № 48. Основные понятия теории графов

Понятие графа и его элементы; эйлеровы и гамильтоновы графы; древовидные графы; графы и матрица; матрицы смежности; матрицы инцидентности; примеры практических задач, решаемых с помощью теории графов.

Тема № 49. Потоки на сетях. Постановка задачи о максимальном потоке

Сетевая модель и её основные элементы; порядок и правила построения сетевых графиков; упорядочение сетевого графика; понятие о пути; временные параметры сетевых графиков.

РАЗДЕЛ 18. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Тема № 50. Основные понятия. Назначения и области применения моделей управления запасами

Основные характеристики моделей управления запасами; назначение управления запасами; области применения моделей управления запасами.

Тема № 51. Статистическая детерминированная модель без дефицита (с дефицитом)

Статистическая детерминированная модель без дефицита; статистическая детерминированная модель с дефіцитом.

Тема № 52. Стохастические модели управления запасами

Стохастические модели управления запасами с фиксированным временем задержки поставок

Содержание практических занятий и самостоятельной контролируемой работы

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема №1. Матрицы

Операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, умножение двух матриц), нахождение минора и алгебраического дополнения, нахождение обратной матрицы.

ТЕСТ 1

1.Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Выяснить, какие из следующих операций можно выполнить:
1) $A+B$; 2) A^I+B^I; 3) $A+B^I$; 4) $A\,B$: 5) $B\,A$; 6) $A\,B^T$; 7) A^TB; 8) A^TB^T; 9) B^TA^T.

2. Даны матрицы:
$A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.Найти B^TA^TAB.

3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу С= A^5.

ОТВЕТ: $C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, где a=…; b=…; c=…; d=…

Тема №2. Определители

Вычисление определителей разных порядков.

ТЕСТ 2

1.Дана матрица
$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 7 & 0 & -2\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$$
Найти определитель $|B|$ матрицы $B=A^/A$.

2.Выяснить, какие из приведенных ниже матриц имеют обратные:
1) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

3.При каком значении α матрица $D=A^2+(C^{-1}B^{-1})^{-1}$ Будет равна матрице BC,где $A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ \alpha & -6\end{pmatrix}$?

4.Расположить матрицы в порядке убывания их рангов:
1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 1\\ 5 & 7 & 9 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & -2 & -3 & -4\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Тема №3. Системы линейных уравнений

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы, при помощи формул Крамера, решение СЛУ методом Гаусса.

ТЕСТ 3

1. По формулам Крамера решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

В ответе указать значения переменных x_1, x_2 и определителя Δ_3.

2. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

В ответе указать x_1, x_3 и элемент a_{12} обратной матрицы A^{-1}.

3. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

4. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_3 = 2, \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Выберите верное утверждение:

1) система определенная;
2) система несовместная;
3) система неопределенная.

Контрольные и задания по теме «Системы линейных уравнений»

№	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1	По формулам Крамера решить систему:		
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$
2	Решить матричное уравнение:		
	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

3	Методом Гаусса решить систему уравнений, заданную в матричной форме: $AX = B$.Дано : $X = (x_1 x_2 x_3 x_4)^{\prime}$,		
	$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{\prime}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}^{\prime}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}^{\prime}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}^{\prime}$
4	Решить систему, составленную из первых трех уравнений системы в задаче 3.Указатьчисло базисных решений и найти одно из них.		
5	Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:		
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 10x_4 \end{cases}$

РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

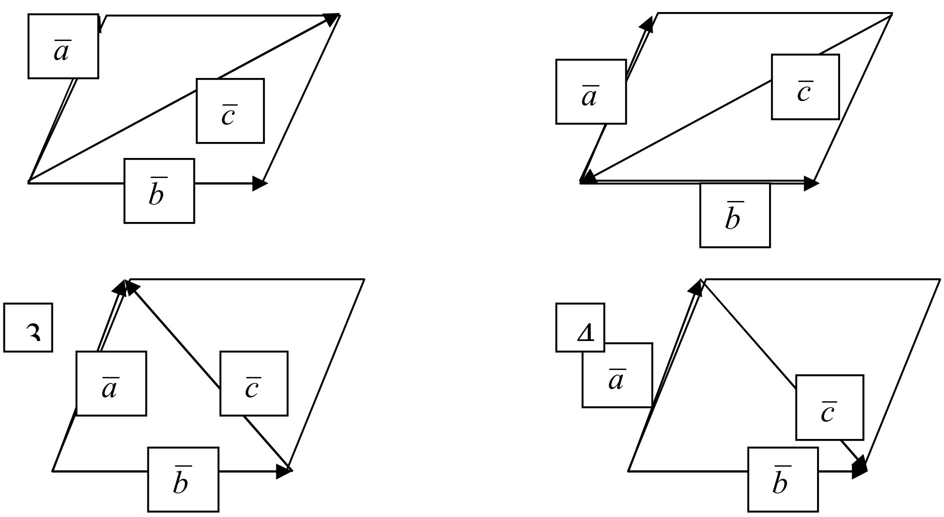
Тема №4. Векторы

Линейные операции над векторами в геометрической и алгебраической форме, разложение вектора на составляющие, нахождение скалярного произведения, нахождение длины вектора и угла между векторами.

ТЕСТ 4

1. Установить соответствие между рисунками и векторными равенствами:

1 2



а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$; в) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$; в) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$; г) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$

2. Определить длину вектора $\vec{c}=4\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4,$ угол $\vec{a}\vec{b}=120^{\circ}.$

3. Найти $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c},$ где $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - единичные векторы, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$

Тема№5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений. Применение этих произведений.

Контрольные задания по теме «Элементы матричного анализа»

№	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3
1	Даны два единичных вектора $\overline{m}$ и $\overline{n}$, и угол между которыми 120° .Найти : а) острый угол между диагоналями параллелограмма , построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$; б) проекцию вектора $\overline{b}$ на направление вектора $\overline{a}$:		
	$\overline{a}$ = -2 $\overline{m}+\overline{n}$, $\overline{b}$ = - $\overline{m}$ +3 $\overline{n}$	$\overline{a}$ = 2 $\overline{m}$ - $\overline{n}$, $\overline{b}$ = -3 $\overline{m}+\overline{n}$	$\overline{a}$ = $\overline{m}$ -3 $\overline{n}$, $\overline{b}$ = $\overline{m}$ +2 $\overline{n}$
2	Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы a_1, a_2, a_3:		
	$a_1=(1;4;6),$ $a_2=(1;-1;1),$ $a_3=(1;1;3)$	$a_1=(2;-3;1),$ $a_2=(3;-1;5),$ $a_3=(1;-4;3)$	$a_1=(1;2;3),$ $a_2=(4;5;6),$ $a_3=(7;8;9)$
3	Даны четыре вектора a_1, a_2, a_3 и $\overline{b}$ в некотором базисе. Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе:		
	$a_1=(4;5;2),$ $a_2=(3;0;1),$ $a_3=(-1;4;2)$ $b=(5;7;8)$	$a_1=(3;-5;2),$ $a_2=(4;5;1),$ $a_3=(-3;0;-4)$ $b=(1;20;1)$	$a_1=(-2;3;5),$ $a_2=(1;-3;4),$ $a_3=(7;8;-1)$ $b=(1;20;1)$

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Тема №6. Линии на плоскости

Нахождение уравнения прямой в общем виде, в каноническом виде, с угловым коэффициентом, проходящей через точку в заданном направлении, через две заданные точки, в отрезках; расстояние от точки до прямой; составление уравнения медианы, высоты, биссектрисы треугольника.

Тема №7. Линии второго порядка

Канонические уравнения кривых второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы).

РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

Тема №8. Функция

Исследование и построение графиков элементарных функций

Тема №10. Предел функции

Вычисление пределов функции в точке и в бесконечности, признаки существования предела, замечательные пределы, задача о непрерывном начислении процентов.

Тема №11. Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Бесконечно малые и бесконечно большие величины, основные теоремы о пределах функций

Тема №12. Непрерывность функций

Понятие непрерывности функции в точке, в интервале, на отрезке; непрерывность основных элементарных функций, свойства функций, непрерывных в точке, непрерывность обратной и сложной функций, точки разрыва и их классификация.

ТЕСТ 5

1.Выяснить, чему равен $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n$:

1) ∞; 2) -1; 3) не существует; 4) 1.

2.Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно малые при $x \to 0$:

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y= x^{10}$; 3) $y= \sin\frac{x}{3}$; 4) $y= \cos 2x$; 5) $y= \frac{1}{\cos 3x}$.

3.Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно большие при $x\to \infty$

1) $y= \sqrt[9]{x}$; 2) $y=$ tg x ; 3) $y= \log_{0,5}x$; 4) $y= \frac{1}{x^{-2}}$; 5) y= arctg x.

4.Произведение двух бесконечно малых и бесконечно большой величин является:

1)бесконечно малой величиной; 2) бесконечно большой величиной;

3)неопределенностью.

5.Выяснить, какие из перечисленных функций непрерывны в точке x=0:

1)$y=\frac{1}{x}$; 2) $y=\sqrt{x+1}$; 3) $y= \begin{cases} 1, \text{ при } x\le 0, \\ x, \text{ при } x> 0. \end{cases}$ 4) $y= \begin{cases} -x, \text{ при } x<0, \\ 0, \text{ при } x=0, \\ x, \text{ при } x\ge 0; \end{cases}$ 5) y= tg x.

6.Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2-2x-10}{2x^2+7x+5.}$

7.Найти $a= \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2+3}\right)^{x^2}$,в ответе указать ln a.

8.Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$.

9.Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{2x-5}\right)^{6x}$.

10.Найти а, если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+3x^2-18}{ax^4-18x^2+3}=\frac{1}{2}$.

11.Найти а, если $\lim \frac{tgax}{8x}=2.$

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема №13. Производная функции

Алгоритм нахождения производной; нахождение производной при помощи правил дифференцирования, техника дифференцирования, нахождение производной сложной и обратной функций, производных высших порядков, использование понятия производной в экономике.

Контрольные задания по теме «Производная»

№	*Вариант 1*	*Вариант 2*	*Вариант 3*
1	**Найти производные функций**		
а)	y=(3x-1)* xln($\sqrt{1+4x^2}$ +2x)	y= (5x-4)* xln($\sqrt{1+9x^2}-3x$)	y= (2-x)* xln($\sqrt{1+25x^2}+5x$)
б)	y= arctg $\frac{2x}{1-x^2}$	y= arccos $\sqrt{1-x^2}$ (x>0)	y= arctg $\sqrt{1-x^2}$
2	**Показать, что функция y = y(x) удовлетворяет уравнению F (x, y, y', y'') =0:**		
	y= 3e $^{x^2}$, $xxy''-xy'^2-yy'=0$	y= 2 $xe^{-\frac{1}{x}}$, $x^2yy''-(y-xy')^2=0$	y= $\frac{1}{2}e^{2x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $xy''-y'\ln\frac{y'}{x}=0$
3	**Найти производную n-го порядка:**		
	$y=\frac{1}{2x-3}$	$y=\frac{1}{1-3x}$	$y=\frac{1}{5x+2}$
4	**Составить уравнение касательных к графику функций**:		
	$y=\frac{2x+1}{x+1}$, перпендикулярных прямой y+x+7=0	$y=\frac{x+2}{x+4}$, параллельных прямой y-2x+1=0	$y=\frac{2-x}{2x-1}$, проходящих через точку М (2; -2)

Тема №14. Дифференциал функции

Вычисление дифференциалов функций, использование понятия дифференциала в приближенных вычислениях, нахождение дифференциалов высших порядков.

Тема №15. Приложения производной

Нахождение экстремумов функций, наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, точек перегиба, асимптот графика функции; исследование функций по общей схеме и построение графиков, приложение производной в экономической теории.

ТЕСТ 6

1.Выяснить, какие функции являются непрерывными, но не дифференцируемыми в точке x_0:

1) y $=|x+2|$, $x_0=2$; 2) y $=|x-5|$, x_0=5; 3) y = $\sqrt[5]{x-8}$, $x_0=8$;

4) y= tg (x+$\frac{\pi}{4}$), $x_0=\pi$; 5) y $=\sqrt{3x^2-4x+1}$, x_0=0.

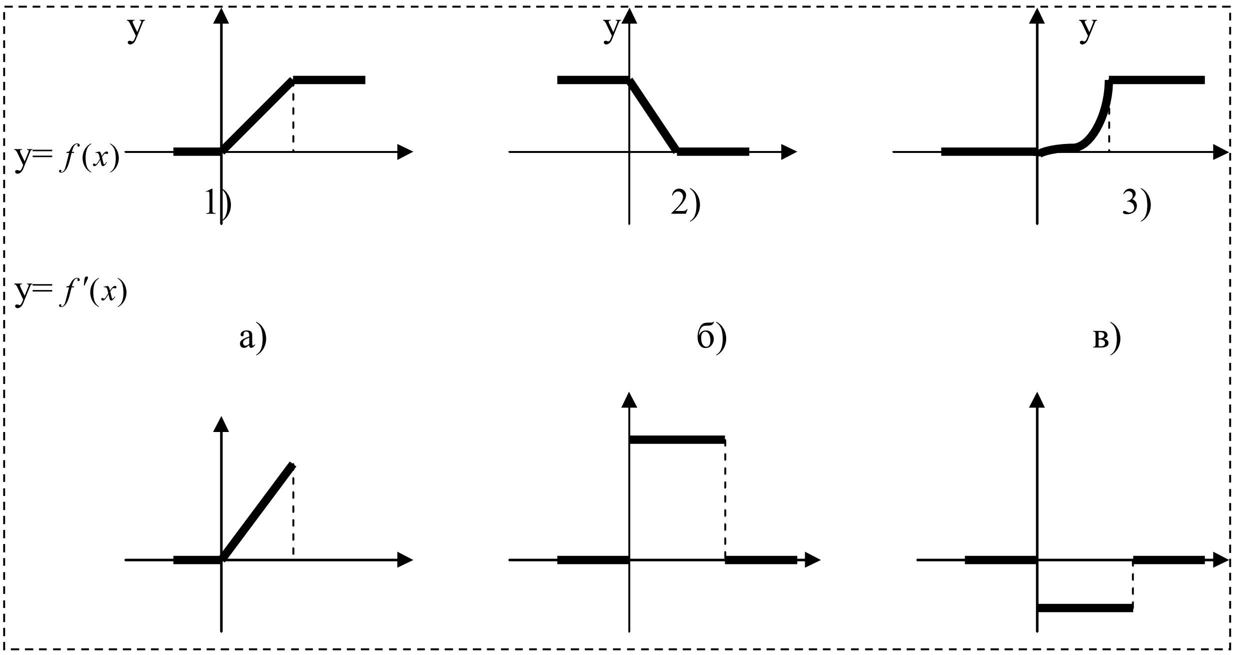
2.Выяснить, какие из функций являются дифференцируемыми в точке x_0=1:

1) y= tg (1+$\sqrt{x}$); 2) y = arccos x; 3) y = $\sqrt[5]{x^2-8x+3}$;

4) y= x^2 ln(1-x^2); 5) y = $|3x-2|$.

3.При каком значении параметра *a* функция y=ln(x+a$\sqrt{x^2-1}$) является дифференцируемой в точке $x_0=1$?

4.Установить соответствие между графиками функций y = f (x) (1,2,3) и их производными $y'=f'$(x) (*а,б,в*):



Вычислить значения производных функций в точке x_0:

5. y = $12\ \ln(x+\sqrt{x^2+3}), x_0=1.$
6. y = $(x^2+5x-4)\ln x, x_0=1.$
7. y = $\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})-\sqrt{2x}, x_0=0.$
8. y = $\frac{5}{7}(arctg(1+x^2)-\sqrt{3x^2+1}), x_0=1.$

9. Составить уравнение касательной к графику функции $y=4x-x^2$ в точке $x_0=3.$

Ответ: y = kx+b, где k=…; b=… .

10.При каком значении x_0 касательная к графику функции $y=2\sqrt{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$ наклонена к оси абсцисс под углом 45°?

РАЗДЕЛ 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

Тема №16. Понятие и представление комплексных чисел

Примеры использования комплексных чисел, геометрическое изображение комплексных чисел, формы записи комплексных чисел.

Тема №17. Действия над комплексными числами

Арифметические действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел, извлечение корня из комплексных чисел).

РАЗДЕЛ 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема №18. Неопределенный интеграл

Простейшие приемы интегрирования (непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям), разложение дробно-рациональной функции на простейшие дроби, интегрирование рациональных функций, интегрирование тригонометрических функций, интегрирование иррациональных функций.

ТЕСТ по теме «Неопределенный интеграл»

1 При каких a и b функция F(x) $=\frac{a}{3}x^b+2x^2+x+1$ является первообразной для $f(x)=(2x+1)^2$?

2 При каких целых a, b, c функция $F(x)=2e^{3x+1}$ является первообразной для функции $f(x)=ae^{bx+c}$?

3 При каких целых a, b, c функции $F_1(x)=\frac{1}{a}(1+bx)^c$ и $F_2(x)=1+x-1{,}5x^2$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$?

4 Найти $\int\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x}dx.$

Ответ: $ax+b\sqrt{x}+d\ln|x|+C,$ где a, b, d – целые числа: a=… , b=… , d=…

5 Найти $\int\left(\frac{17-2x}{3}\right)^3 dx.$

Ответ: $\frac{3}{a}\left(\frac{17+bx}{3}\right)^d + C,$ где a, b, d – целые числа: a=… , b=… , d=… .

6 Найти $\int\frac{2x+3}{4x-7}dx$

Ответ: $\frac{1}{a}x+\frac{b}{d}\ln|4x-7\ |+C,$ где a, b, d – целые числа, дробь $\frac{b}{d}$ - несократима, b>0; a=… , b=… , d=… .

7 Найти $\int xe^{x^{2}-3}dx$

Ответ: $\frac{a}{b}e^{x^2+d}$ где a, b, d – целые числа, дробь a/b – несократима, a>0 a=… , b=… , d=… .

8 Найти $\int\ x^{\ 3}\ \ln\ \ xdx$

Ответ: $\frac{1}{a}x^b+\frac{1}{d}x^4\ln x+C,$ где a, b, d- целые числа : a =… , b = … , d =...

9 Найти $\int\frac{dx}{x^2-2x-3}$

Ответ: $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x+b}{x+d}\right|+C,$ где a, b, d –целые числа, a > 0: a =…, b = …, d = …

10 Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Ответ: arcsin $\frac{ax+b}{d}$ + C, где a, b, d - целые числа, a > 0 : a = … , b = … , d = …

Тема №19. Определенный интеграл

Формула Ньютона-Лейбница, вычисления определенного интеграла, замена переменной в определенном интеграле, приближенные вычисления определенных интегралов, использование понятия определенного интеграла в экономике.

Тема №20. Несобственный интеграл

Вычисление несобственных интегралов первого, второго рода.

ТЕСТ по теме «Определенный интеграл»

1. Найти максимальное значение интегральной суммы функций $y=x^2$ на отрезке $[0,1]$, если число отрезков разбиения равно 4.

Ответ: a/b, где a=…, b = …(a и b- положительные целые числа, дробь a/b – несократима).

2. При каких значениях параметров a и b справедливо равенство:

$$\int_0^1 x\sqrt{e^{x^2+1}}dx = e^{a} - \sqrt{e^{b}} \; ?$$

3. Найти такие значения a и b,при которых справедливо равенство:

$$\int_1^{e-1} \ln(x+1)dx = a - 2\ln b.$$

4. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+7x}.$$

Ответ: $\frac{1}{a}\ln\frac{9}{b}$, где a=…, b = …,(a и b- целые числа).

5. Найти объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной линиями $x = y^2$, $x = 4y - y^2$, x=0.

Ответ:aπ/3, где a=… .

6. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4xe^{-2x}$ и её горизонтальной асимптотой на промежутке $[0;+\infty)$.

7. Вычислить определённый интеграл $\int_0^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$,если он сходится.

РАЗДЕЛ 8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тема №21. Функции нескольких переменных

Нахождение области определения функции двух переменных, предела функции двух переменных, частных производных, дифференциала функции двух переменных, производной по направлению, градиента, экстремума функции нескольких переменных, наибольшего и наименьшего значения функции, локального экстремума функции нескольких переменных, условного экстремума при помощи метода множителей Лагранжа.

РАЗДЕЛ 9: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема №22. Дифференциальные уравнения I порядка

ДУ первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, неполные; ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.

Тема №23. Дифференциальные уравнения высших порядков

ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.

Тема №24. Линейные ДУ

Однородные линейные ДУ I порядка, линейные ДУ II порядка с постоянными коэффициентами.

ТЕСТ по теме «Дифференциальные уравнения»

1. Установить соответствие между приведёнными дифференциальными уравнениями первого порядка и их типами:

1) y = x($y' - \sqrt[x]{e^{y}}$); а) с разделяющимися переменными;

2) $x^2(yy'+2) = x-1$; б) линейное;

3) $x^2(2x+y)dx = dy$. в) однородное.

2. Выяснить, при каких целых значениях параметров a и b функция $y = e^{bx^2+x^4/a}$ является решением уравнения $dy-(x^3y+2xy)dx = 0$.

3. Найти интегральную кривую уравнения $dy = xe^y dx$, проходящую через точку (2;0).

Ответ: $2e^{ay}+bx^2+d=0$,где a=… , b=… , d=… .

4. Пусть y = y(x)- интегральная кривая уравнения dx - (3x+1) y ^{2} dy =0, проходящая через точку (1; $\sqrt[3]{\ln 4}$). Найти y(0)

5. Пусть y = y (x) –решение уравнения y`+xy=x, удовлетворяющее условию y (0) = 2. Найти y($\sqrt{2}$) (с точностью до 0,1)

6. Найти решение уравнения y`= $\frac{x+y}{x}$, удовлетворяющее условию y(1) = 0 . В ответе дать значение y (2).

7. Найти решение уравнения y``+6y`+5y=25x $^2$ -2, удовлетворяющее начальным условиям y(0)=12, y`(0)=-12.

РАЗДЕЛ 10: РЯДЫ

Тема №25. Числовые ряды

Исследование ряда на сходимость, признаки: сравнения, Даламбера, интегральный; ряды с положительными членами, ряды с членами произвольного знака.

Тема №26. Степенные ряды

Применение рядов в приближенных вычислениях.

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 11. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема № 28. Теорема сложения вероятностей

Вычисление элементов комбинаторики, классической вероятности, применение теоремы сложения вероятностей несовместных событий; определение полной группы событий, противоположных событий.

Определение ***Вероятностью события A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события *A* определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих *A;*

n — число всех равновозможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна единице.*
Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*
Свойство 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Задача

Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение:

Обозначим через A событие — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = 1/10. \blacksquare$$

Определение ***Суммой A+B двух событий*** A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.

Например, если из орудия произведены два выстрела и
A — попадание при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле,
то $A+B$ — попадание при первом выстреле, или при втором, или при обоих выстрелах.

В частности, если два события A и B — ***несовместные***, то $A+B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Теорема. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Теорема. *Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, образующих полную группу, равна единице:*

$$P(A_1) + P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Теорема. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:*

$$P(A) + P(\bar{A})=1$$

Тема № 29. Теорема умножения вероятностей

Применение теоремы умножения вероятностей; вычисление вероятности появления хотя бы одного события; нахождение полной вероятности; применение формула Байеса, формула Бернулли, локальной и интегральной теоремы Лапласа.

СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение 1 ***Произведением двух событий*** A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Например, если A — деталь годная, B — деталь окрашенная, то AB — деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A, B, C — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют ***безусловной***; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют ***условной***.

Определение 2 ***Условной вероятностью $P_A(B)$*** называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Определение 3 ***Событие B называют независимым от события A***, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Теорема. *Вероятность совместного появления двух* ***независимых*** *событий равна произведению вероятностей этих событий*:

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Определение 4 Два события называют ***совместными***, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Например, A — появление двух очков при бросании игральной кости; B — появление четного числа очков. События A и B — совместные.

Теорема (сложения вероятностей совместных событий) *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Задача 1

Экспедиция издательства отправила в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое из почтовых отделений равна 0,9. Найти вероятность того, что:

а) оба почтовых отделения получат газеты вовремя;

б) оба почтовых отделения получат газеты с опозданием;

в) только одно почтовое отделение получит газеты вовремя;

г) хотя бы одно почтовое отделение получит газеты вовремя.

Решение:

Обозначим события:

A – первое почтовое отделение получит газеты вовремя;

B – второе почтовое отделение получит газеты вовремя.

По условию $P(A) = 0{,}9$; $P(B) = 0{,}9$

а) C – оба постовых отделения получат газеты вовремя. Событие C состоит в совмещении событий A, B, т.е. $C = A \cdot B$

События A и B независимые, поэтому применима теорема умножения

$$P(C)=P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)= 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$$

б) D – оба почтовых отделения получат газеты с опозданием;

A – первое почтовое отделение получит газеты с опозданием (т.е. не во время);

B – второе почтовое отделение получит газеты с опозданием.

$$D = (A \cdot B)$$

$$P(D) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$$

т.к. $P(A) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$$P(B) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

в) E – только одно почтовое отделение получит газеты вовремя.

Интересующее событие E можно представить в виде суммы несовместимых событий $A \cdot B$ и $A \cdot B$, т.е.: $E=A \cdot B+A \cdot B$

По теореме сложения

$$P(E)=P(A \cdot B+A \cdot B)=P(A \cdot B)+P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)+P(A) \cdot P(B)=$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}1+0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09+0{,}09 = 0{,}18$$

г) (*первый способ*)

F – хотя бы одно почтовое отделение получит газеты вовремя.

Событие F можно представить в виде суммы несовместимых событий:

$$F=A \cdot B+A \cdot B+A \cdot B$$

По теореме сложения:

$$P(F)=P(A \cdot B+A \cdot B+A \cdot B)=P(A \cdot B)+P(A \cdot B)+P(A \cdot B)=$$
$$=P(A) \cdot P(B)+P(A) \cdot P(B)+P(A) \cdot P(B)=$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}1+ 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}09+0{,}09+0{,}81 = 0{,}99$$

г) (*второй способ*)

События «хотя бы одно почтовое отделение получит газеты вовремя» и «оба почтовых отделения получат газеты с опозданием» (т.е. события D и F) являются противоположными. Поэтому:

$$P(D)+P(F)=1 \Rightarrow P(F)=1-P(D)= 1- 0{,}01 = 0{,}99 \ \blacksquare$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \ldots, P_{B_n}(A)$ события A. Как найти вероятность события A? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема (полной вероятности). *Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:*

$$P(A) = P(B_1)\, P_{B_1}(A) + P(B_2)\, P_{B_2}(A) + \ldots \ldots + P(B_n)\, P_{B_n}(A).$$

Теорема Байеса. *Условная вероятность любой гипотезы B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) (определяющие условные вероятности гипотез) может быть вычислена по формуле*

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

Полученные формулы называют *формулами Байеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). *Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.*

Задача 2.

У рыбака есть три излюбленных места рыбалки. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того что рыба клюнет в первом месте, равна 1/3, во втором – 1/2, в третьем – 1/4. Известно, что рыбак забросил удочку три раза, а вытащил только одну рыбу. Какова вероятность того, что он рыбачил в первом из его излюбленных мест?

Решение:

Обозначим через A событие – рыба клюнет. Рыбак забросил удочку три раза, поэтому:

A_1 - рыба клюнет при 1ом забрасывании удочки;

A_2 - рыба клюнет при 2ом забрасывании удочки;

A_3 - рыба клюнет при 3^{ем} забрасывании удочки.

Можно сделать три предположения (гипотезы):

B_1 - рыбак рыбачит в 1ом месте;

B_2 - рыбак рыбачит в 2ом месте;

B_3 - рыбак рыбачит в 3^{ем} месте;

Т.к. эти места рыбак посещает с одинаковой вероятностью, то:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

Искомая вероятность того, что рыбак рыбачил в первом из его излюбленных мест, по формуле Байеса равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}$$

Событие A можно представить в виде суммы несовместимых событий:

$$A = \underline{A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}} + \underline{\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}} + \underline{\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3}$$

рыба клюнет при 1ом забрасывании и не клюнет при 2ом и 3^{ем} | рыба клюнет при 2ом забрасывании удочки и не клюнет при 1ом и 3^{ем} | рыба клюнет при 3^{ем} забрасывании и не клюнет при 1ом и 2ом

Подсчитаем условные вероятности

$$P_{B_1}(A) = P_{B_1}(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P_{B_1}(A_1)\cdot P_{B_1}(\overline{A}_2)\cdot P_{B_1}(\overline{A}_3) +$$
$$+ P_{B_1}(\overline{A}_1)\cdot P_{B_1}(A_2)\cdot P_{B_1}(\overline{A}_3) + P_{B_1}(\overline{A}_1)\cdot P_{B_1}(\overline{A}_2)\cdot P_{B_1}(A_3)$$

т.к. $P_{B_1}(A_1) = \frac{1}{3}$, то $P_{B_1}(\overline{A}_1) = \frac{2}{3}$, поэтому имеем

$$P_{B_1}(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = 3\cdot\frac{4}{27} = \frac{4}{9}$$

Аналогично

$$P_{B_2}(A) = P_{B_2}(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P_{B_2}(A_1)\cdot P_{B_2}(\overline{A}_2)\cdot P_{B_2}(\overline{A}_3) +$$
$$+ P_{B_2}(\overline{A}_1)\cdot P_{B_2}(A_2)\cdot P_{B_2}(\overline{A}_3) + P_{B_2}(\overline{A}_1)\cdot P_{B_2}(\overline{A}_2)\cdot P_{B_2}(A_3) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P_{B_3}(A) = P_{B_3}(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P_{B_3}(A_1)\cdot P_{B_3}(\overline{A}_2)\cdot P_{B_3}(\overline{A}_3) +$$
$$+ P_{B_3}(\overline{A}_1)\cdot P_{B_3}(A_2)\cdot P_{B_3}(\overline{A}_3) + P_{B_3}(\overline{A}_1)\cdot P_{B_3}(\overline{A}_2)\cdot P_{B_3}(A_3) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = 3\cdot\frac{9}{64} = \frac{27}{8}$$

Подставим в формулу Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{64}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{4}{7} + \frac{1}{8} + \frac{9}{64}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{27}}{\frac{4\cdot 64 + 1\cdot 8\cdot 27 + 9\cdot 27}{27\cdot 64}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{256+216+243}{27\cdot 64}} = \frac{4\cdot 27\cdot 64}{27\cdot(256+216+243)} = \frac{256}{715} \approx 0{,}495 \ \blacksquare$$

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p.

Следовательно, вероятность ненаступления события *А* в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$

Теорема Бернулли. *Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие А наступит ровно k раз в n независимых испытаниях, равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число*:

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k}$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли.*

Задача 3.

Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что в ближайшие *6* суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение.

Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0{,}75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4\, p^4\, q^2 = (6! / (2!*4!)) * (0,75)^4 * (0,25)^2 = 0,30. \ ■$$

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях *n* достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно *k* раз в *n* испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Локальная теорема Муавра - Лапласа. *Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность Pn(k) того, что событие А появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции*

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi(x)$$

при $x = (k - np)/\sqrt{npq}.$

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2},$$

соответствующие положительным значениям аргумента *х* (приложение 1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ - четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi(x)$$

где $x=(k—np)/\sqrt{npq}.$

Задача 4.

Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение:

По условию, n=400; k=80; p=0,2; q=0,8. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400*0,2*0,8}} *\varphi(x) = \frac{1}{8} * \varphi(x)$$

Вычислим значение x, определяемое данными задачи:

$$x = (k-np)/\sqrt{npq} = (80-400*0.2) / 8=0$$

По таблице приложения 1 находим φ (0)= 0,3989.

Итак, искомая вероятность

$$P_{400}(80) = (1/8)*0,3989 = 0,04986. ■$$

Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа.

Интегральная теорема Муавра - Лапласа. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz,$$

где $x'=(k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x''= (k_2-np)/\sqrt{npq}.$

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, определяется по формуле:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где $x' = (k_1 -np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный

интеграл $\int e^{z}\ dz$ не выражается через элементарные функции. Таблица для интеграла
приведена в учебнике по теории вероятностей (см. приложение 2). В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений x и для $x = 0$. Для $x < 0$ пользуются той же таблицей, учитывая, что функция $\Phi(x)$ - нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. В таблице приведены значения интеграла лишь до $x = 5$. В случае $x>5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют *функцией Лапласа.*

Задача 5.

Найти вероятность того, что событие A наступит не менее 70 и не более 100 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение

По условию, n=400, k_1=70; k_2=100; p=0,2; q=0,8. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-400*0{,}2}{\sqrt{400*0{,}2*0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100-400*0{,}2}{\sqrt{400*0{,}2*0{,}8}} = 2{,}5;$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70,100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице приложения 2 находим:

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938; \quad \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{400}(70,100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882. \ \blacksquare$$

Тема № 30. Случайные величины и законы их распределения

Определение законов распределения ДСВ и НСВ; вычисление числовых характеристик ДСВ и НСВ.

Определение 1. ***Случайной*** называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Например, число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Определение 2. ***Дискретной (прерывной)*** называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.
Определение 3.***Непрерывной*** называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.
Определение 4.***Законом распределения дискретной случайной величины*** называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает- одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X = x_1$, $X = x_2$, . . ., $X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Биномиальное распределение.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

О п р е д е л е н и е. *Дискретная случайная величина X имеет* ***биномиальный*** *закон распределения с параметрами* ***n*** *и* ***p****, если она принимает значения* 0,1,2,...,*k*,...,*n* *с вероятностями*

$$\boldsymbol{P_n(k)= C_n^k p^k q^{n-k}} \qquad \textbf{(1)}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Биномиальный закон распределения представляет собой закон распределения числа X = k наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	…	k	…	n
$\boldsymbol{p}$	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства **(1)** можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона.

Задача 1.

Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

Решение.

Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты p=1/2, следовательно, вероятность непоявления «герба» : q= 1 — 1/2=1/2.
При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_2(2) = C_2^2 \cdot p^2 = (1/2)^2 = 0{,}25,$$

$$P_2(1) = C_2^2 \cdot p \cdot q = 2 * (1/2)*(1/2) = 0{,}5,$$

$$P_2(0) = C_2^2 \cdot q^2 = (1/2)^2 = 0{,}25.$$

Напишем искомый закон распределения:

X	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Контроль: 0,25 + 0,5 + 0,25=1. ■

Распределение Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p \le 0{,}1$). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

О п р е д е л е н и е. *Дискретная случайная величина X имеет* ***закон распределения Пуассона*** *с параметром* $\lambda > 0$, *если она принимает значения* 0,1, 2, ..., m,... *(бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями*

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda). \qquad \textbf{(2)}$$

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

Здесь $\lambda = np$.

Задача 2.

Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение.

По условию, $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $m = 3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000*0{,}0002=1.$$

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \lambda^{m} \cdot e^{-\lambda} / m! = e^{-1} / 3! = 1/(6e) \sim 0{,}06. \ ■$$

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0<p<1$) и, следовательно, вероятность его непоявления $q=1-p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в k-м испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось.

О п р е д е л е н и е. *Дискретная случайная величина $X = k$ имеет **геометрическое распределение** с параметром p, если она принимает значения* 1, 2, ..., k... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p. \qquad \textbf{(4)}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1-p$.

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид:

X	**1**	**2**	**3**	…	**k**	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{k-1}	…

Полагая $k=1, 2, \ldots$ в формуле **(4)**, получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q ($0<q<1$):

$$p, qp, q^2p\ldots, q^{k-1}p, \ldots$$

По этой причине распределение (4) называют ***геометрическим***.

Задача 4.

Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при пятом выстреле.

Решение.

По условию, $p = 0{,}6$, $q= 0{,}4$, $k = 5$. Искомая вероятность по формуле **(4)**

$$P = q^{k-1} * p = 0{,}4^4 * 0{,}6 = 0{,}01536. \ ■$$

Гипергеометрическое распределение

Прежде чем дать определение гипергеометрического распределения, рассмотрим задачу. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M < N$). Из партии случайно отбирают n изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается в партию (поэтому формула Бернулли здесь не применима). Обозначим через X случайную величину — число m

стандартных изделий среди n отобранных. Очевидно, возможные значения X таковы: 0, 1, 2, ..., min (M, n).

О п р е д е л е н и е. *Дискретная случайная величина X имеет* ***гипергеометрическое*** *распределение с параметрами n, M, N, если она принимает значения* 0,1,2,m, ...,min(n, M) *с вероятностями*

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad \textbf{(5)}$$

где $M \leq N$, $n \leq N$; *n, M, N — натуральные числа.*

Задача 5.

Среди 50 изделий 20 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий окажется ровно 3 окрашенных.

Решение.

По условию, $N = 50$, $M = 20$, $n = 5$, $m = 3$. Искомая вероятность

$$P(X = 3) = C_{20}^3\, C_{30}^2 / C_{50}^5 = 0{,}234. \ \blacksquare$$

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание M (X) случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:]

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Задача 6.

Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	*2*	3	5

p	0,1	0,6	0,3

Решение.

Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$M(X)=2\cdot 0,1+3\cdot 0,6+5\cdot 0,3=3,5$.

Напишем закон распределения случайной валичины X^2:

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$M(X^2)=4\cdot 0,1+9\cdot 0,6+25\cdot 0,3=13,3$.

Искомая дисперсия

$D(X)=M(X^2)—[M(X)]^2=13,3—(3,5)^2=1,05$. ■

Задача 7.

Найти закон распределения дискретной случайной величины X, которая имеет два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Математическое ожидание $M(X)$, дисперсия $D(X)$ и вероятность p_1 возможного значения x_1 известны:

$$p_1=0,8;\ M(X)=3,2;\ D(X)=0,16.$$

Решение.

Дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	x_1	x_2
p	p_1	p_2

По условию $x_1 < x_2$; $p_1=0,8$; $M(X)=3,2$; $D(X)=0,16$.

Таким образом, $p_2=1-p_1=0,2$ и значит закон распределения:

X	x_1	x_2
p	0,8	0,2

Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$$M(X)=0,8\,x_1+0,2\,x_2=3,2$$

Напишем закон распределения для X^2:

X^2	x_1^2	x_2^2
p	0,8	0,2

Для определения дисперсии воспользуемся формулой:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

Здесь: $M(X^2)=0,8\,x_1^2+0,2\,x_2^2$;

$M(X)=3,2$ (по условию)

$\Rightarrow D(X)=0,8\,x_1^2+0,2\,x_2^2-3,2^2=0,16$

Т.е. имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1+0{,}2x_2=3{,}2 \\ 0{,}8x_1^2+0{,}2x_2^2-3{,}2^2=0{,}16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}2x_2=3{,}2-0{,}8x_1 \\ 0{,}8x_1^2+0{,}2x_2^2-10{,}24=0{,}16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=16-4x_1 \\ 0{,}8x_1^2+0{,}2\cdot(16-4x_1)^2-10{,}24-0{,}16=0 \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение:

$$0{,}8x_1^2+0{,}2\cdot(256-128x_1+16x_1^2)-10{,}4=0$$

$$0{,}8x_1^2+51{,}2-25{,}6x_1+3{,}2x_1^2-10{,}4=0$$

$$4x_1^2-25{,}6x_1+40{,}8=0$$

$$x_1^2-6{,}4x_1+10{,}2=0$$

По теореме Виета: (*пусть* x_1 и x_1' - *корни данного уравнения*)

$$\begin{cases} x_1+x_1'=6{,}4 \\ x_1\cdot x_1'=10{,}2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=3{,}4 \\ x_1'=3 \end{cases}$$

Возвращаясь к системе, имеем:

$$\begin{cases} x_2=16-4x_1 \\ x_1=3{,}4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2=16-4x_1 \\ x_1=3 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x_2=16-13{,}6 \\ x_1=3{,}4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=16-12 \\ x_1=3 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x_2=2{,}4 \\ x_1=3{,}4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=4 \\ x_1=3 \end{cases}$$

По условию $x_1 < x_2$, значит $x_1=3$; $x_2=4$. Тогда искомый закон распределения

X	3	4
p	0,8	0,2

Проверим:

$M(X) = 3\cdot0{,}8+4\cdot0{,}2=2{,}4+0{,}8=3{,}2$

$D(X) = 9\cdot0{,}8+16\cdot0{,}2-3{,}2^2=7{,}2+3{,}2-10{,}24=10{,}4-10{,}24=0{,}16$ ■

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ
ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НСВ

Равномерный закон распределения

О п р е д е л е н и е. *Непрерывная случайная величина X имеет* ***равномерный (прямоугольный) закон*** *распределения на отрезке [a, b], если ее плотность вероятности p(x) постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его,* т.е.

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 0 & \text{при } x<a,\ x>b.\end{cases}$$

Кривая распределения $\varphi(x)$ и график функции распределения $F(x)$ случайной величины X приведены на рис. 4.2, *а, б.*

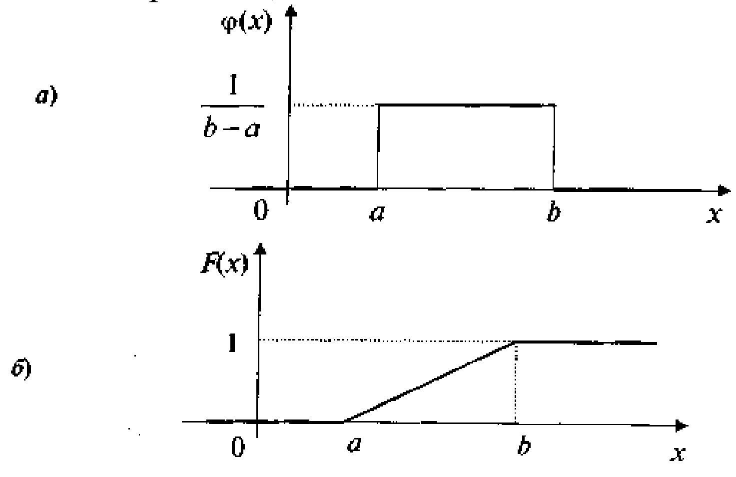


Рис. 4.2

Теорема. *Функция распределения случайной величины X, распределенной по равномерному закону, есть*

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le a,\\ (x-a)/(b-a) & \text{при } a<x\le b,\\ 1 & \text{при } x>b,\end{cases}$$

её *математическое ожидание*

$$M(X)=\frac{a+b}{2},$$

а *дисперсия*

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Действительно, при $x<a$ функция распределения $F(x)=0$. При $a<x<b$ имеем

$$F(x)=\int_a^x\frac{dx}{b-a}=\frac{x}{b-a}\bigg|_a^x=\frac{x-a}{b-a}.$$

При $x>b$ очевидно, что

$$F(x)=\int_a^b\frac{dx}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1,$$

т.е. формула доказана. Математическое ожидание случайной величины X с учетом его механической интерпретации как центра масс равно абсциссе середины отрезка, т.е.

$$M(X) = (a+b)/2$$

Тот же результат получается по другой формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b\right) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

По формуле для дисперсии:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M(X)\right]^2 \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{3(b-a)}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\bigg|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left[\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right] = \frac{(b-a)^2}{12}. \blacksquare$$

Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке [-0,5; +0,5]), в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчиненных заданному распределению. Так, случайная величина X, распределенная по равномерному закону на отрезке [0; 1], называемая *«случайным числом* от 0 до 1», служит исходным материалом для получения ел у чайных величин с любым законом распределения.

Задача 1.

Случайная величина X задана интегральной функцией $F(x)$.

Требуется:

а). найти дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности);

б). найти математическое ожидание и дисперсию X;

в). построить графики интегральной и дифференциальной функций

$$F(x)= \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Решение.

$$F(x)= \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

а).

Плотность распределения равна первой производной от функции распределения

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

б).

Используем формулу

$$M(X)=\int_{\alpha}^{b} x\ f(x)dx$$

Подставив a=0, b=1, $f(x)$=2x, получим

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\ \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$, т.е. $M(X)=\dfrac{2}{3}$

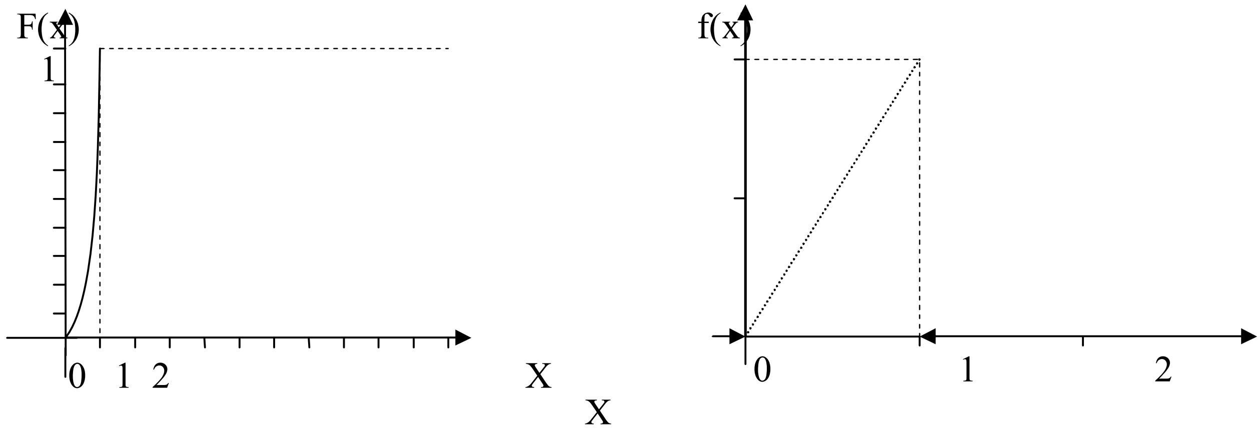
Дисперсию будем искать по формуле

$$D(X)=\int_0^1 x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2$$

Подставив сюда $M(X)=\dfrac{2}{3}$, a = 0, b = 1, $f(x)$ = 2x получим

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2\int_0^1 x^3dx-\frac{4}{9}=\frac{x^4}{2}\Big|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

в).



<u>Показательный (экспоненциальный) закон распределения</u>

О п р е д е л е н и е. *Непрерывная случайная величина X имеет* ***показательный (экспоненциальный)*** *закон распределения с параметром X* > 0, *если ее плотность вероятности имеет вид:*

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \textbf{при } x\ge 0,\\ 0 & \textbf{при } x<0.\end{cases}$$

Кривая распределения *φ(x)* и график функции распределения *F(x)* случайной величины *X* приведены ниже на рис.

Теорема. *Функция распределения случайной величины X, распределенной по показательному (экспоненциальному) закону, есть*

$$F(x)=\begin{cases}0 & \textbf{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \textbf{при } x\ge 0,\end{cases}$$

ее *математическое ожидание*

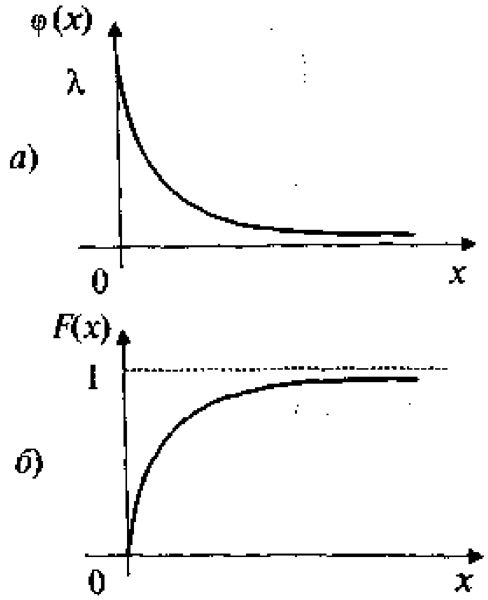
$$M(X)=\frac{1}{\lambda},$$

а *дисперсия*

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

При $x<0$ функция распределения $F(x)=0$. При $x>a$ имеем:

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x},$$



т.е. формула доказана.

Найдем математическое ожидание случайной величины *X,* используя при вычислении метод интегрирования по частям:

$$a=M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\varphi(x)dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\int_0^b x\,de^{-\lambda x}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{-\lambda x}\Big|_0^b+\int_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-be^{-\lambda b}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b\right)=$$

$$=0-\frac{1}{\lambda}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\lambda b}-1\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

Для нахождения дисперсии $D(X)$ вначале найдем

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\int_0^b x^2 de^{-\lambda x}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\int_0^b 2xe^{-\lambda x}dx\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-b^2e^{-\lambda b}\right)+\frac{2}{\lambda}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\lambda^{-\lambda x}dx=0+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\lambda^2},$$

с учетом того, что во втором слагаемом несобственный интеграл есть
M(X) = (a+ b)/2
Теперь

$$D(X)=M\left(X^2\right)-a^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.\ \blacksquare$$

Из доказанной теоремы следует, что для *случайной величины, распределенной по показательному закону, математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению,* т.е.

$$M(X)=\sigma_x=1/\lambda.$$

Показательный закон распределения играет большую роль в теории массового обслуживания и теории надежности. Так, например, интервал времени *T* между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром *X* — интенсивностью потока.

РАЗДЕЛ 12. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Тема № 33. Понятие марковского случайного процесса. Потоки событий

Установление закона распределения числа событий за фиксированный промежуток времени в простейшем потоке.

Простейший поток событий.

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. Примерами потоков служат: поступление вызовов на АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие самолетов в аэропорт, клиентов на предприятие бытового обслуживания, последовательность отказов элементов и многие другие.

Среди свойств, которыми могут обладать потоки, выделим свойства стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления *k* событий на любом промежутке времени зависит только от числа *k* и от длительности промежутка и не зависит от начала его отсчета

Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления *k* событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно.

Т е о р е м а *Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона*

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} / k! \qquad (3)$$

Задача 3.

Среднее число вызовов поступающих на АТС за 1 минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит (*предполагается, что поток вызовов – простейший*):

а). четыре вызова;

б). менее четырех вызовов;

в). не менее четырех вызовов.

Решение.

По условию $\lambda=2$, $t = 3$, $k = 4$.

2 вызова за 1 мин; 3 мин.; 4 вызова

Воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_t(k)=\frac{(\lambda k)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

а). Вероятность того, что за 3 минуты поступит 4 вызова:

$$P_3(4) = \frac{(2\cdot 3)^4 \cdot e^{-2\cdot 3}}{4!} = \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{24} = \frac{1296\cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135$$

б). Событие «поступило менее четырех вызовов» произойдет, если наступит одно из следующих несовместных событий:

1. Поступило три вызова;
2. Поступило два вызова;
3. Поступил один вызов;
4. Не поступило два вызова

Эти события несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_3(k<4) = P_3(3)+P_3(2)+P_3(1)+P_3(0) = \frac{6^3\cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6\cdot e^{-6}}{1!}+e^{-6} =$$

$$= e^{-6}(36+18+6+1) = 0{,}0025\cdot 61 = 0{,}1525$$

в). События «поступило менее четырех вызовов» и «поступило не менее четырех вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 3 минуты поступит не менее четырех вызовов, равна

$$P(k \geq 4) = 1 - P(k<4) = 1 - 0{,}1525 = 0{,}8475 \ \blacksquare$$

Тема № 34. СМО с отказами

Решение задач с использованием одноканальной системы с отказами; многоканальной система с отказами (задача Эрланга).

Тема № 35. СМО с ожиданием (очередью)

Решение задач с использованием одноканальной системы с неограниченной очередью; многоканальной системы с неограниченной очередью; СМО с ограниченной очередью; СМО с ограниченным временем ожидания.

<u>РАЗДЕЛ 13. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА</u>

Тема № 37. Проверка статистических гипотез

Статистическое оценивание параметров генеральной совокупности; определение точечных оценок; интервальных оценок; критической области; ошибок первого и второго рода.

Задача

Найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0,95,зная выборочную среднюю $\overline{x}$, объем выборки n и среднее квадратическое отклонение σ.

$$\overline{x} = 75{,}09; \quad \sigma = 14; \quad n = 196.$$

<u>Решение:</u>

Среднее квадратическое отклонение $\sigma = 14$;

Математическое ожидание a;

Выборочная средняя $\overline{x} = 75{,}09$;

Объем выборки $n = 196$;

Надежность $\gamma = 0{,}95$

Найдем t.

Из соотношения $2\Phi(t) = 0{,}95$ получим $\Phi(t) = 0{,}475$

По таблице приложения 2 находим $t = 1{,}96$

Найдем плотность оценки:

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 14}{\sqrt{196}} = \frac{1{,}96 \cdot 14}{14} = 1{,}96$$

Доверительный интервал таков: ($\overline{x}$ -1,96; $\overline{x}$ +1,96)

Т.к. $\overline{x}$ = 75,09, то доверительный интервал имеет следующие доверительные границы:

$\overline{x} - 1{,}96 = 75{,}09 - 1{,}96 = 73{,}13$;

$\overline{x} + 1{,}96 = 75{,}09 + 1{,}96 = 77{,}05$.

Таким образом, значения неизвестного параметра a, согласующиеся с данными выборки, удовлетворят неравенству 73,13< a <77,05 ■

Тема № 38. Корреляционно-регрессионнный анализ

Составление уравнение регрессии; основные задачи корреляционно-регрессионного анализа.

Задача 1

Найти методом произведений:

а). выборочную среднюю;

б). выборочную дисперсию;

в). выборочное среднее квадратическое отклонение по данному статистическому распределению выборки (в первой строке указаны выборочные варианты x_i, а во второй – соответственные частоты n_i количественного признака X).

x_i	100	110	120	130	140	150	160
n_i	4	6	10	40	20	12	8

Решение.

Составим расчетную таблицу, для чего:

1). запишем варианты в первый столбец (x_i);

2). запишем частоты (n_i) во второй столбец; сумму частот (n = 100) поместим в нижнюю клетку столбца;

3). в качестве ложного нуля C выберем варианту 130, которая имеет наибольшую частоту (эта варианта расположена в середине вариационного ряда); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей выбранный ложный нуль, пишем 0; над нулём записываем последовательно -1, -2, -3, а под нулем 1, 2, 3;

4). произведения частот n_i на условные варианты u_i запишем в четвертый столбец; отдельно находим сумму (-34) отрицательных и отдельно сумму (68) положительных чисел; сложив эти числа, их сумму (34) помещаем в нижнюю клетку столбца;

5). произведения частот на квадраты условных вариант, т.е. $n_i \cdot u_i^2$, запишем в пятый столбец (здесь удобнее перемножить числа каждой строки третьего и четвертого столбцов: $u_i \cdot n_i u_i = n_i \cdot u_i^2$); сумму чисел столбца (210) помещаем в нижнюю клетку столбца;

6). произведения частот на квадраты условных вариант, увеличенных на единицу, т.е. $n_i \cdot (u_i + 1)^2$, запишем в шестой контрольный столбец; сумму чисел столбца (378) помещаем в нижнюю клетку шестого столбца.

В итоге получаем расчетную таблицу:

1	2	3	4	5	6

x_i	n_i	u_i	$n_i \cdot u_i$	$n_i \cdot u_i^2$	$n_i \cdot (u_i+1)^2$
100	4	-3	-12	36	16
110	6	-2	-12	24	6
120	10	-1	-10	10	0
130	40	0	A_1=-34	---	40
140	20	1	20	20	80
150	12	2	24	48	108
160	8	3	24	72	128
			A_2=68		
	n=100		$\sum n_i u_i$=34	$\sum n_i u_i^2$=210	$\sum n_i(u_i+1)^2$=378

Контроль: $\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 210+2\cdot 34+100=378$

$\sum n_i \cdot (u_i+1)^2 = 378$

Вычисления произведены правильно

Теперь вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{34}{100} = 0{,}34$$

$$M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{210}{100} = 2{,}1$$

Найдем шаг: h=110-100=10

Вычислим искомые выборочные среднюю и дисперсию:

$$\overline{X_в} = M_1^* h + C = 0{,}34 \cdot 10 + 130 = 3{,}4 + 130 = 133{,}4$$

$$D_в = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right] \cdot h^2 = \left[2{,}1 - 0{,}34^2\right] \cdot 10^2 = \left[2{,}1 - 0{,}1156\right] \cdot 100 = 1{,}9844 \cdot 100 = 198{,}44$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение – это квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{198{,}44} = 14{,}0869 \quad ■$$

Задача 2

Найти выборочное уравнение прямой $\overline{y_x} - \overline{y} = r_в \cdot \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} \cdot \left(x - \overline{x}\right)$ регрессии Y на X по данной корреляционной таблице:

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
30	2	6	-	-	-	-	8
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	7	40	2	-	49
60	-	-	4	9	6	-	19
70	-	-	-	4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	n=100

Решение.

Искомое уравнение в общем виде

$$\overline{y_x} - \overline{y} = r_в \cdot \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} \cdot \left(x - \overline{x}\right)$$

1). Вычислим выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{\sum n_{uv} \cdot uv - n \cdot \overline{uv}}{n \cdot \tilde{\sigma}_u \cdot \tilde{\sigma}_v}$$

1.1) Вычислим $\sum n_{uv} \cdot uv$ по данным корреляционной таблицы

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
30	2	6	-	-	-	-	8
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	7	40	2	-	49
60	-	-	4	9	6	-	19
70	-	-	-	4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	n=100

Перейдем к условным вариантам:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1} = \frac{x_i - 20}{5}$$

(в качестве ложного нуля C_1 взята варианта x=20, расположенная примерно в середине вариационного ряда; шаг h_1 равен разности между двумя соседними вариантами: 10-5=5)

$$v_i = \frac{y_j - C_2}{h_2} = \frac{y_j - 50}{10}$$

(в качестве ложного нуля C_2 взята варианта y=50; шаг h_2 равен разности между двумя соседними вариантами: 40-30=10)

Составим корреляционную таблицу в условных вариантах. В 1ом столбце вместо ложного нуля C_2 (варианты 50) пишут 0; над нулем последовательно записывают -1,-2; под нулем 1,2. В 1ой строке, вместо ложного нуля C_1 (варианты 20) пишут 0; слева от нуля последовательно записывают -1,-2,-3; справа от нуля пишут 1,2. Все остальные данные переписывают из первоначальной корреляционной таблицы. В итоге получим корреляционную таблицу в условных вариантах.

V \ U	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	2	6	-	-	-	-	8
-1	-	5	3	-	-	-	8
0	-	-	7	40	2	-	49

1	-	-	4	9	6	-	19
2	-	-	-	4	7	5	16
n_u	2	11	14	53	15	5	n=100

Теперь для вычисления искомой суммы $\sum n_{uv}\cdot uv$ составим расчетную таблицу

$V \backslash U$	-3	-2	-1	0	1	2	$U=\sum n_{uv}\cdot u$	$v\cdot U$
-2	-6 2 -4	-12 6 -12	---	---	---	---	-18	36
-1	---	-10 5 -5	-3 3 -3	---	---	---	-13	13
0	---	---	-7 7 0	0 40 0	2 2 0	---	-5	0
1	---	---	-4 4 4	0 9 9	6 6 6	---	2	2
2	---	---	---	0 4 8	7 7 14	10 5 10	17	34
$V=\sum n_{uv}\cdot v$	-4	-17	1	17	20	10		$\sum_v v\cdot U=85$
$u\cdot V$	12	34	-1	0	20	20	$\sum_u u\cdot V=85$	контроль

Здесь в правых верхних углах клеток – произведение частоты n_{uv} на варианту u (например, для 1[ой] строки: $-3\cdot2=-6$; $-2\cdot6=-12$); в левых нижних углах клеток – произведение частоты n_{uv} на варианту v (например, для 1[го] столбца: $-2\cdot2=-4$).

Имеем: $\sum_v v\cdot U=\sum_u u\cdot V=85$ следовательно, искомая сумма $\sum n_{uv}\cdot u\cdot v=85$

1.2). Найдем $\overline{u}$ и $\overline{v}$:

$$\overline{u}=\frac{\sum n_u\cdot u}{n}=\frac{2\cdot(-3)+11\cdot(-2)+14\cdot(-1)+53\cdot 0+15\cdot 1+5\cdot 2}{100}=$$

$$\frac{-6-22-14+15+10}{100}=\frac{-17}{100}=-0{,}17$$

$$\overline{v}=\frac{\sum n_v\cdot v}{n}=\frac{8\cdot(-2)+8\cdot(-1)+49\cdot 0+19\cdot 1+16\cdot 2}{100}=\frac{-16-8+19+32}{100}=$$

$$=\frac{27}{100}=0{,}27$$

1.3). Вычислим вспомогательные величины $\overline{u}^2$ и $\overline{v}^2$, а затем, $\widetilde{\sigma}_u$ и $\widetilde{\sigma}_v$:

$$\overline{u}^2=\frac{\sum n_u\cdot u^2}{n}=\frac{2\cdot 9+11\cdot 4+14\cdot 1+15\cdot 1+5\cdot 4}{100}=\frac{18+44+14+15+20}{100}=$$

$$=\frac{111}{100}=1{,}11$$

$$\widetilde{\sigma}_u=\sqrt{\overline{u}^2-(\overline{u})^2}=\sqrt{1{,}11-(-0{,}17)^2}=\sqrt{1{,}11-0{,}0289}=\sqrt{1{,}0811}=1{,}04$$

$$\overline{v}^2=\frac{\sum n_v\cdot v^2}{n}=\frac{8\cdot 4+8\cdot 1+19\cdot 1+16\cdot 4}{100}=\frac{32+8+19+64}{100}=\frac{123}{100}=1{,}23$$

$$\widetilde{\sigma}_v=\sqrt{\overline{v}^2-(\overline{v})^2}=\sqrt{1{,}23-0{,}27^2}=\sqrt{1{,}23-0{,}729}=\sqrt{1{,}1571}=1{,}076$$

Найдем искомый выборочный коэффициент корреляции, учитывая, что $\sum n_{uv}\cdot u\cdot v=85$

$$r_в=\frac{\sum n_{uv}\cdot uv-n\cdot\overline{uv}}{n\cdot\widetilde{\sigma}_u\cdot\widetilde{\sigma}_v}=\frac{85-100\cdot(-0{,}17)\cdot 0{,}27}{100\cdot 1{,}04\cdot 1{,}076}=\frac{89{,}59}{111{,}904}=0{,}8006$$

$$\underline{r_в=0{,}8006}$$

2). Необходимо найти $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\widetilde{\sigma}_x$ и $\widetilde{\sigma}_y$

$$\overline{x}=\overline{u}\cdot h_1+C_1=-0{,}17\cdot 5+20=-0{,}85+20=19{,}15$$

$$\overline{y}=\overline{v}\cdot h_2+C_2=0{,}27\cdot 10+50=2{,}7+50=52{,}7$$

$$\widetilde{\sigma}_x=\widetilde{\sigma}_u\cdot h_1=1{,}04\cdot 5=5{,}2$$

$$\widetilde{\sigma}_y=\widetilde{\sigma}_v\cdot h_2=1{,}076\cdot 10=10{,}76$$

Подставив найденные величины в $\overline{y_x}-\overline{y}=r_в\cdot\frac{\widetilde{\sigma}_y}{\widetilde{\sigma}_x}\cdot\left(x-\overline{x}\right)$, получим искомое уравнение (возьмем $r_в=0{,}8$)

$$\overline{y}_x-52{,}7=0{,}8\cdot\frac{10{,}76}{5{,}2}\cdot(x-19{,}15)$$

$$\bar{y}_x - 52{,}7 = 1{,}655 \cdot (x - 19{,}15)$$
$$\bar{y}_x = 52{,}7 + 1{,}655x - 31{,}49$$
$$\bar{y}_x = 1{,}655x + 21{,}21$$

Сравним условные средние, вычисленные:
а) по этому уравнению;
б) по данным корреляционной таблицы (например, при x=25):
а) $\bar{y}_{30} = 1{,}655 \cdot 30 + 21{,}21 = 62{,}585$
б) $\bar{y}_{30} = \dfrac{50 \cdot 2 + 60 \cdot 6 + 70 \cdot 7}{15} = 63{,}333$

Видно, что согласование расчетного и наблюдаемого условных средних – удовлетворительное. ■

ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 14. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Тема № 39. Введение. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи ЛП

Графический метод решения задачи ЛП.

1. Решить графически задачу линейного программирования:

$$f(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 120, \\ 2x_1 + 6x_2 \le 72, \\ x_2 \le 10; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Теперь построим прямые, соответствующие каждому из функциональных ограничений задачи (см. рисунок 1). Эти прямые обозначены на рисунке (1), (2) и (3).

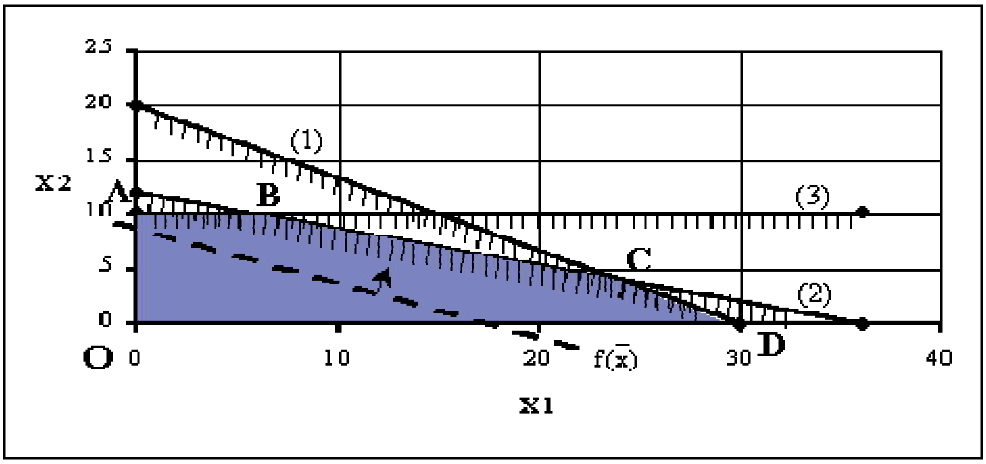


Рисунок 1. Геометрическое решение ЗЛП

3. Штрихи на прямых указывают полуплоскости, определяемые ограничениями задачи.

4. Область допустимых решений включает в себя точки, для которых выполняются все ограничения задачи. В нашем случае область представляет собой пятиугольник (на рисунке обозначен ABCDO и окрашен синим цветом).

5. Прямая, соответствующая целевой функции, на рисунке представлена пунктирной линией.

6. Прямую передвигаем параллельно самой себе вверх (направление указано стрелкой), поскольку именно при движении в этом направлении значение целевой функции увеличивается. Последней точкой многоугольника решений, с которой соприкоснется передвигаемая прямая, прежде чем покинет его, является точка С. Это и есть точка, соответствующая оптимальному решению задачи.

7. Осталось вычислить координаты точки С. Она является точкой пересечения прямых (1) и (2). Решив совместно уравнения этих прямых, найдем: $x_1^* = 24$, $x_2^* = 4$. Подставляя найденные величины в целевую функцию, найдем ее значение в оптимальной точке $f(\bar{x}^*) = 64$. ■

Тема № 40. Симплексный метод

Решение задачи ЛП симплексным методом; решение методом искусственного базиса.

Задача. Максимизировать целевую функцию

$$F = 12x_1 + 10x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 13x_1 + 2x_2 \le 260 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 124 \\ 3x_1 + 14x_2 \le 280 \end{cases}$$

$x_i \ge 0$, $i = 1,2$

Добавим к системе неравенств 3 дополнительных неотрицательных переменных x_3, x_4, x_5.

И перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} 13x_1 + 2x_2 + x_3 = 260 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 124 \\ 3x_1 + 14x_2 + x_5 = 280 \end{cases}$$

$x_i \ge 0$, $i = 1,5$

В качестве основных переменных выберем x_3, x_4, x_5.

Построим первую симплексную таблицу

Базис	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Оценочное отношение
x_3	260	13	2	1	0	0	20
x_4	124	4	4	0	1	0	31

x_5	280	3	14	0	0	1	$93\frac{1}{3}$
F	0	-12	-10	0	0	0	

Итерация 1

В последней строке таблицы имеются отрицательные коэффициенты. Выберем наибольший по модулю. Значит 1-й столбец разрешающий, переменная x_1 перейдет в основные. По оценочным отношениям определяем, что 1-я строка разрешающая. Разрешающий элемент $x_{1,1} = 13$

Рассчитаем следующую симплексную таблицу, элементы которой найдем по правилу прямоугольника.

Базис	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Оценочное отношение
x_1	20	1	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	0	0	130
x_4	44	0	$3\frac{5}{13}$	$-\frac{4}{13}$	1	0	13
x_5	220	0	$13\frac{7}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0	1	$16\frac{1}{4}$
F	240	0	$-8\frac{2}{13}$	$\frac{12}{13}$	0	0	

Итерация 2

В последней строке таблицы имеются отрицательные коэффициенты. Выберем наибольший по модулю. Значит 2-й столбец разрешающий, переменная x_2 перейдет в основные. По оценочным отношениям определяем, что 2-я строка разрешающая. Разрешающий элемент $x_{2,2} = 3\frac{5}{13}$

Рассчитаем следующую симплексную таблицу.

Базис	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Оценочное отношение
x_1	18	1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{22}$	0	130
x_2	13	0	1	$-\frac{1}{11}$	$\frac{13}{44}$	0	13
x_5	44	0	0	1	-4	1	$16\frac{1}{4}$
F	346	0	0	$\frac{2}{11}$	$2\frac{9}{22}$	0	

Получен оптимальный план $X^* = (18, 13, 0, 0, 44)$, максимизирующий целевую функцию $F(X^*) = 12 \cdot 18 + 10 \cdot 13 = 346$ руб.

Тема № 42. Транспортная задача

Решение транспортной задачи методами «северо-западного угла», минимального элемента, потенциалов.

Метод «северо-западного угла»

Распределяют груз, начиная с левой верхней, условно называемой северо-западной, клетки (1,1). Необходимо удовлетворить потребности B_1 за счет поставщика A_1;

1. а). Если $b_1>a_1$, в клетку (1,1) записывают a_1 и строку 1 вычеркивают из рассмотрения;

   b). Если $a_1>b_1$, в клетку (1,1) записывают b_1 и столбец 1 вычеркивают из рассмотрения;
2. а). Если $b_1>a_1$, $\Delta= b_1 - a_1$ – неудовлетворенные потребности. Спускаются на клетку вниз и сравнивают Δ с a_2;

   b). Если $a_1>b_1$, $\Delta=a_1 - b_1$ – не вывезенные запасы. Двигаются по строке вправо и сравнивают Δ с b_2;
3. Необходимо вернуться к пункту 2;
4. Рассчитываются транспортные расходы.
5. Согласно данному методу запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используется запасы следующего по номеру поставщика.
6. Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. При этом нулевые перевозки принято заносить в таблицу только в том случае, когда они попадают в клетку (i,j), подлежащую заполнению, т.е. в таблицу заносятся только базисные нули (0^*), остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.
7. Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно m+n-1 и векторы условий, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.
8. Необходимо иметь в виду, что метод северо-западного угла не учитывает стоимость перевозок, поэтому, опорное решение, построенное по данному методу, может быть далеким от оптимального.

Метод минимального элемента

При этом методе на каждом шаге построения опорного плана первою заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф. Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них.

Пример.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	

A_1	70 $\boxed{20}$	50	15 $\boxed{100}$	80	70 $\boxed{180}$	300
A_2	80 $\boxed{150}$	90	40	60	85	150
A_3	50	10 $\boxed{110}$	90	11 $\boxed{120}$	25 $\boxed{20}$	250
Потребности	170	110	100	120	200	700

В данном случае заполнение таблицы начинается с клетки для неизвестного x_{32}, для которого мы имеем значение $c_{32}=10$, наименьше из всех значений c_{ij}. Эта клетка находится на пересечении третьей строки и второго столбца, соответствующим третьей базе A_3 и второму заказчику B_2. Третья база A_3 может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 $(a_3=250, b_2=110, a_3>b_2)$. Полагая $x_{32}=110$, вписываем это значение в клетку x_{32} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_3 остается изменённый запас $a'_3=140$. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1, A_2, A_3 и четырьмя столбцами B_1, B_3, B_4, B_5 клеткой с наименьшим значением c_{ij} клетка, где $c_{34}=11$. Заполняем описанным выше способом эту клетку и аналогично заполняем следующие клетки. В результате оказываются заполненными (в приведенной последовательности) следующие клетки:

$x_{32}=110, x_{34}=120, x_{13}=100, x_{35}=20, x_{15}=180, x_{11}=20, x_{21}=150$.

на пятом шаге клеток с наименьшими значениями c_{ij} оказалось две $(c_{11}=c_{15}=70)$. мы заполнили клетку для x_{15}, положив $x_{15}=180$. можно было выбрать для заполнения другую клетку, положив $x_{11}=170$, что приведет в результате к другому опорному плану. общий объем перевозок в тонно-километрах для этого плана составит

$S_1=70\cdot 20+15\cdot 100+70\cdot 180+80\cdot 150+10\cdot 110+11\cdot 120+25\cdot 20=30420$.

Замечание. В диагональном методе не учитываются величины тарифов, в методе же наименьшей стоимости эти величины учитываются, и часто последний метод приводит к плану с меньшими общими затратами (что и имеет место в нашем примере), хотя это и не обязательно.

Метод потенциалов

	B1	B2	B3	B4	B5	запасы
A1	3	8	7	11	15	260
A2	14	3	1	8	6	400
заявки	9	5	16	7	12	240

Модель транспортной задачи является закрытой, суммарное количество запасов (груза) превышает суммарное число заявок. Поэтому добавим в таблицу фиктивного потребителя (столбец B6) с объемом потребления 611 и стоимостью всех перевозок к данному потребителю равных нулю.

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	запасы
A1	3	8	7	11	15	0	260
A2	14	3	1	8	6	0	400
заявки	9	5	16	7	12	611	240

Составим опорный план перевозок методом наилучших цен

Припишем поставщикам и потребителям потенциалы: поставщикам - u_i, потребителям - v_j

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	запасы	Ui
A1	9^{3}	^{8}	^{7}	7^{11}	^{15}	244^{0}	260	0
A2	^{14}	5^{3}	16^{1}	^{8}	12^{6}	367^{0}	400	0
заявки	9	5	16	7	12	611	240	
Vj	3	3	1	11	6	0		

Сумма затрат по опорному плану перевозок составит:

$S(x) = 9 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 16 \cdot 1 + 7 \cdot 11 + 12 \cdot 6 + 244 \cdot 0 + 367 \cdot 0 = 207$

Составим систему уравнений потенциалов для заполненых клеток и решим ее, полагая, что $u_1=0$:

По заполненным клеткам	Найдём потенциалы
$v_1+u_1=3$	$v_1=3$
$v_2+u_2=3$	$v_2=3$
$v_3+u_2=1$	$v_3=1$
$v_4+u_1=11$	$v_4=11$
$v_5+u_2=6$	$v_5=6$
$v_6+u_1=0$	$v_6=0$
$v_6+u_2=0$	$u_1=0$
	$u_2=0$

Оценим свободные клетки. Найдем для каждой клетки косвенный тариф (косвенный тариф свободной клетки - это сумма потенциалов этой клетки). И сравним косвенные и истинные тарифы.

$v_1+u_2=3 \leq 14$ - истина

$v_2+u_1=3 \leq 8$ - истина

$v_3+u_1=1 \leq 7$ - истина

$v_4+u_2=11 \leq 8$ - ложь

$v_5+u_1=6 \leq 15$ - истина

Полученный план не является оптимальным, т.к. имеются клетки, косвенный тариф которых больше истинного.

Клетка (2,4) имеет максимальную по модулю разность между истинным и косвенным тарифом.

Чтобы загрузить эту клетку и снизить затраты на перевозки, произведем перестановку по циклу:

(2;4) → (1;4) → (1;6) → (2;6) по 7 единиц груза.

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	запасы	Ui
A1	9 [3]	[8]	[7]	- [11]	[15]	+ 251 [0]	260	0
A2	[14]	5 [3]	16 [1]	+ 7 [8]	12 [6]	- 360 [0]	400	0
заявки	9	5	16	7	12	611	240	
Vj	3	3	1	8	6	0		

Сумма затрат по новому плану перевозок составит:

$S(x) = 9 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 16 \cdot 1 + 7 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 251 \cdot 0 + 360 \cdot 0 = 186$

Составим систему уравнений потенциалов для заполненых клеток и решим ее, полагая, что $u_1=0$:

По заполненным ячейкам	найдем:
$v_1+u_1=3$	$v_1=3$
$v_2+u_2=3$	$v_2=3$
$v_3+u_2=1$	$v_3=1$
$v_4+u_2=8$	$v_4=8$
$v_5+u_2=6$	$v_5=6$
$v_6+u_1=0$	$v_6=0$
$v_6+u_2=0$	$u_1=0$
	$u_2=0$

Оценим свободные клетки. Найдем для каждой клетки косвенный тариф и сравним косвенные и истинные тарифы.

$v_1+u_2=3 \le 14$ - истина

$v_2+u_1=3 \le 8$ - истина

$v_3+u_1=1 \le 7$ - истина

$v_4+u_1=8 \le 11$ - истина

$v_5+u_1=6 \le 15$ - истина

Косвеные тарифы свободных клеток не превышают истинные, значит новый вариант плана перевозок является оптимальным.

$x_{1,1} = 9$ (партий стоимостью по 3 ден.ед.).

$x_{1,6} = 251$ (партий стоимостью по 0 ден.ед.).

$x_{2,2} = 5$ (партий стоимостью по 3 ден.ед.).

$x_{2,3} = 16$ (партий стоимостью по 1 ден.ед.).

$x_{2,4} = 7$ (партий стоимостью по 8 ден.ед.).

$x_{2,5} = 12$ (партий стоимостью по 6 ден.ед.).

$x_{2,6} = 360$ (партий стоимостью по 0 ден.ед.).

$S(x) = 9 \cdot 3 + 251 \cdot 0 + 5 \cdot 3 + 16 \cdot 1 + 7 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 360 \cdot 0 = 186$ ден.ед.

Оптимальное количество партий товара, которое следует перевозить от конкретных поставщиков к конкретным потребителям, чтобы транспортные затраты были минимальными.

РАЗДЕЛ 16. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Тема № 46. Метод множителей Лагранжа

Исследование функции на экстремум**,** нахождение наибольшего и наименьшего значений функции методом множителей Лагранжа

Тема № 47. Динамическое программирование

Решение задачи ДП.

РАЗДЕЛ 17. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Тема № 49. Потоки на сетях. Постановка задачи о максимальном потоке

Решение задач с помощью теории графов; построение сетевых графиков; упорядочение сетевого графика; временные параметры сетевых графиков.

РАЗДЕЛ 18. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Тема № 51. Статистическая детерминированная модель без дефицита (с дефицитом)

Статистическая детерминированная модель без дефицита; статистическая детерминированная модель с дефицитом.

Тема № 52. Стохастические модели управления запасами

Стохастические модели управления запасами с фиксированным временем задержки поставок

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Вопросы к зачету

1. Операции над матрицами
2. Понятие обратной матрицы, алгоритм нахождения обратной матрицы, ранг матрицы
3. Определители, их свойства
4. Системы линейных уравнений (СЛУ), метод обратной матрицы
5. Системы линейных уравнений, формулы Крамера
6. Системы линейных уравнений, решение СЛУ методом Гаусса
7. Системы линейных однородных уравнений
8. Векторы на плоскости и в пространстве, действия над векторами
9. Разложение вектора на составляющие
10. Действия над векторами, заданными в координатной форме
11. Скалярное произведение векторов
12. Векторное пространство и основные понятия, с ним связанные
13. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора
14. Уравнение линии на плоскости
15. Уравнение прямой: с угловым коэффициентом, проходящей через точку в заданном направлении, через две заданные точки, в отрезках
16. Уравнение пучка прямых
17. Общее уравнение прямой, расстояние от точки до прямой
18. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве
19. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы
20. Функции: понятие функции, числовые функции, график функции, способы задания, основные характеристики функций
21. Понятие обратной и сложной функций
22. Основные элементарные функции и их графики
23. Числовая последовательность, предел числовой последовательности
24. Основные утверждения о пределах числовых последовательностей
25. Предел функции в точке и в бесконечности
26. Бесконечно малые и бесконечно большие величины
27. Основные теоремы о пределах функций
28. Признаки существования предела, замечательные пределы
29. Понятие непрерывности функции, непрерывность основных элементарных функций
30. Свойства функций, непрерывных в точке
31. Непрерывность обратной и сложной функций
32. Точки разрыва и их классификация

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Вопросы к зачету

1. Определение производной, ее геометрический, физический и экономический смысл

2. Алгоритм нахождения производной; основные правила дифференцирования, таблица дифференциалов, производные основных элементарных функций
3. Производная сложной и обратной функций, производные высших порядков
4. Понятие дифференциала функции, геометрический смысл дифференциала
5. Таблица дифференциалов использование дифференциала в приближенных вычислениях, понятие о дифференциалах высших порядков
6. Основные теоремы дифференциального исчисления, правило Лопиталя
7. Возрастание и убывание функций, экстремум функции
8. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке
9. Выпуклость функции, точки перегиба
10. Асимптоты графика функции
11. Общая схема исследования функций и построения их графиков
12. Открытые и замкнутые области на плоскости
13. Функция двух переменных, область определения, линия уровня
14. Предел и непрерывность
15. Дифференциал функции двух переменных
16. Производная по направлению, градиент
17. Экстремум функции нескольких переменных
18. Локальный экстремум функции нескольких переменных
19. Необходимое и достаточное условия экстремума для функции двух переменных
20. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа
21. Первообразная, понятие неопределенного интеграла
22. Свойства неопределенного интеграла, таблица основных интегралов
23. Основные методы интегрирования (непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям)
24. Определение, геометрический и экономический смысл определенного интеграла, свойства определенного интеграла
25. Несобственные интегралы первого, второго рода
26. Основные понятия теории комплексных чисел
27. Геометрическое изображение комплексных чисел
28. Формы записи комплексных чисел
29. Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел, извлечение корня из комплексных чисел
30. ДУ первого порядка, их виды
31. Теорема о существовании и единственности решения
32. ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка
33. Линейные ДУ первого порядка
34. Линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами
35. Основные понятия теории числовых рядов
36. Сходимость ряда, необходимый признак сходимости

37. Гармонический ряд, ряды с положительными членами, ряды с членами произвольного знака
38. Область сходимости степенного ряда, ряд Маклорена

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

Вопросы к зачету

1. Предмет теории вероятностей и её значение для экономической науки
2. Элементы комбинаторики
3. Виды случайных событий
4. Классическая вероятность и её свойства
5. Геометрическая вероятность
6. Относительная частота и её устойчивость
7. Теорема сложения вероятностей событий
8. Полная группа событий
9. Принцип практической невозможности маловероятных событий
10. Условная вероятность
11. Теорема умножения вероятностей
12. Вероятность появления хотя бы одного события
13. Формула полной вероятности
14. Формула Байеса
15. Формула Бернулли
16. Локальная теорема Лапласа
17. Интегральная теорема Лапласа
18. Дискретная случайная величина (ДСВ) и её законы распределения
19. Числовые характеристики ДСВ
20. Непрерывная случайная величина (НСВ) и её законы распределения
21. Числовые характеристики НСВ
22. Закон больших чисел
23. Неравенство Чебышёва; теорема Чебышёва
24. Теорема Бернулли
25. Сходимость по вероятности
26. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова
27. Цепи Маркова
28. Простейший поток требований на обслуживание, поступивший в СМО
29. Закон распределения числа событий за фиксированный промежуток времени в простейшем потоке
30. Одноканальная система с отказами
31. Многоканальная система с отказами (задача Эрланга)
32. Одноканальная система с неограниченной очередью
33. Многоканальная система с неограниченной
34. Понятие о методе Монте-Карло.
35. Вариационные ряды и их характеристики
36. Проверка статистических гипотез
37. Точечные оценки и их свойства; интервальные оценки
38. Ошибки первого и второго рода

39. Мощность критерия.
40. Понятие корреляционной связи;
41. Корреляционная и регрессионная модели
42. Уравнение регрессии

ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР

Вопросы к экзамену

1. Постановка, форма записи и примеры задач линейного программирования
2. Выпуклые многогранные множества и множество допустимых решений
3. Опорное решение задачи ЛП
4. Связь между опорным решением и крайними точками допустимого множества
5. Геометрическая интерпретация задачи ЛП
6. Графический метод решения задачи ЛП.
7. Общая характеристика симплексного метода
8. Построение опорного плана
9. Переход от одного опорного плана к другому в задаче ЛП
10. Симплексные таблицы
11. Описание алгоритма симплексного метода
12. Метод искусственного базиса
13. Вырождение задачи ЛП
14. Устранение зацикленности.
15. Понятие двойственности; правила построения двойственных задач
16. 1-ая теорема двойственности (существование оптимальных решений двойственных задач)
17. 2-ая теорема двойственности (теория равновесия)
18. Постановка транспортной задачи
19. Открытая и закрытая модели ТЗ
20. Основные методы построения первоначального опорного плана ТЗ
21. Метод потенциалов
22. Понятие об игровых моделях
23. Платежная матрица, нижняя и верхняя цена игры
24. Решение игр в смешанных стратегиях
25. Геометрическая интерпретация игры 2х2
26. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования
27. Классические методы определения экстремумов
28. Метод множителей Лагранжа
29. Общая постановка задачи ДП
30. Принцип оптимальности Беллмана
31. Понятие графа и его элементы
32. Эйлеровы и гамильтоновы графы; древовидные графы
33. Графы и матрица; матрицы смежности; матрицы инцидентности
34. Примеры практических задач, решаемых с помощью теории графов
35. Сетевая модель и её основные элементы

36. Порядок и правила построения сетевых графиков
37. Упорядочение сетевого графика
38. Понятие о пути; временные параметры сетевых графиков
39. Основные характеристики моделей управления запасами
40. Назначение управления запасами
41. Области применения моделей управления запасами
42. Статистическая детерминированная модель без дефицита
43. Статистическая детерминированная модель с дефицитом
44. Стохастические модели управления запасами с фиксированным временем задержки поставок

Литература

1. Барботько, Анатолий Иванович.
Основы теории математического моделирования : учеб. пособие / Барботько Анатолий Иванович, Гладышкин Алексей Олегович. - 2-е изд., перераб. и доп. - Старый Оскол : ТНТ, 2009. - 212с.
2. Бахвалов, Николай Сергеевич.
Численные методы : учебное пособие для студентов вузов / Бахвалов, Николай Сергеевич, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельников ; Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 7-е изд. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. - 636 с.Сидняев, Николай Иванович.
Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных : учебное пособие для студентов и аспирантов вузов / Сидняев, Николай Иванович ; Н. И. Сидняев. - М. : Юрайт : [ИД Юрайт], 2011. - 399 с.
3. Виленкин, Игорь Владимирович.
Высшая математика / Виленкин Игорь Владимирович, Гробер Владимир Михайлович. - 5-е изд. - Ростов н/Д. : Феникс, 2009. - 414с.
4. Винберг, Эрнест Борисович.
Курс алгебры : [учебник] / Винберг, Эрнест Борисович ; Э. Б. Винберг . - [Новое изд., перераб. и доп.]. - М. : Изд-во МЦНМО, 2011. - 590 с.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие : В 2 ч. Ч.1 / Данко Павел Ефимович [и др.]. - 7-е изд., испр. - М. : Оникс ; : Мир и образование, 2008. - 368с.
6. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие : В 2 ч. Ч.2 / Данко Павел Ефимович [и др.]. - 6-е изд. - М. : Оникс , Мир Образования, 2007. - 416с.
7. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие. В 2 ч. Ч.2 / Данко Павел Ефимович [и др.]. - 7-е изд., испр. - М. : Оникс ; : Мир и Образование, 2009. - 448с.
8. Высшая математика для экономистов : практикум / под ред. Н.Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юнити-Дана, 2007. - 479с.
9. Высшая математика для экономистов : учебник / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М. : Юнити-Дана, 2009. - 479с.
10. Ильин Владимир Александрович.
Высшая математика : учебник / Ильин Владимир Александрович, Куркина Анна Владимировна. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект, 2009. - 608с.
11. Каплан, Илья Абрамович.
Практикум по высшей математике : учеб. пособие. В 2 т. Т.2 / Каплан Илья Абрамович, Пустынников Владимир Ильич. - 6-е изд., испр. и доп. - М. : Эксмо, 2006. - 512с.
12. Колемаев, Владимир Алексеевич.
Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Колемаев

Владимир Алексеевич, Калинина Вера Николаевна. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Кнорус, 2009. - 384с.

13. Колобашкина, Любовь Викторовна.
Основы теории игр : учебное пособие для студентов вузов / Колобашкина, Любовь Викторовна ; Л. В. Колобашкина. - М. : БИНОМ. Лабаратория знаний, 2011. - 163 с.
14. Кузнецов, Леонид Антонович.
Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие / Кузнецов Леонид Антонович. - 9-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2007. - 240с.
15. Лялин, Вадим Евгеньевич.
Математическое моделирование и информационные технологии в экономике предприятия : учеб. пособие / Лялин Вадим Евгеньевич, Схиртладзе Александр Георгиевич, Борискин Владимир Петрович. - Старый Оскол : ТНТ, 2008. - 292с.
16. Письменный Дмитрий Трофимович.
Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Письменный Дмитрий Трофимович. - 3-е изд. - М. : Айрис-Пресс, 2008. - 288с.
17. Письменный, Дмитрий Трофимович.
Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Письменный Дмитрий Трофимович. - 8-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2009. - 608с.
18. Просветов, Георгий Иванович.
Случайные процессы: задачи и решения : учебно-практическое пособие / Просветов, Георгий Иванович ; Г. И. Просветов. - М. : Альфа-Пресс, 2011. - 55 с.
19. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами : учеб. пособие . 1 курс / Лунгу Константин Никитович [и др.]. - 6-е изд. - М. : Айрис-Пресс, 2007. - 576с.
20. Шипачев Виктор Семенович.
Курс высшей математики : учебник / Шипачев Виктор Семенович ; под ред. А.Н. Тихонова. - 4-е изд., испр. - М. : Оникс, 2009. - 608с.